Biegung und Torsion

Aus dem verallgemeinerten Hookschen Gesetz (vgl. S. 139) kann man ableiten, dass bei isotropen Materialien die Verformungen aus den Spannungen wie folgt berechnet werden können:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{xy}$$

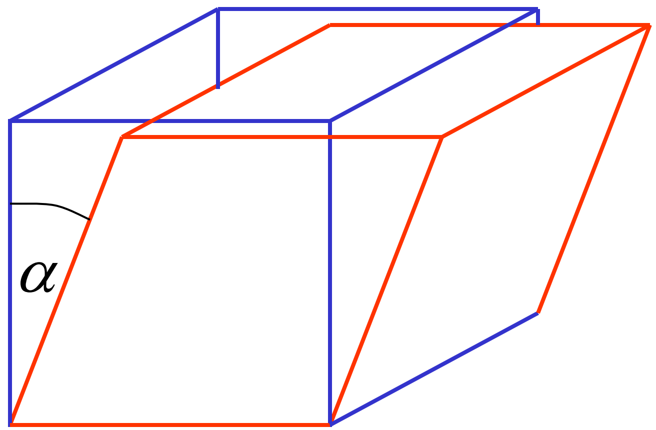
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{yz}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \qquad \varepsilon_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{zx}$$

Den Faktor vor den Scherspannungen nennt man auch 1/G mit dem *Schermodul*

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Bei isotropen Materialien kann man aus der Scherspannung direkt den „Verkippungswinkel“ α berechnen



Herrscht in dem Würfel überall der Spannungszustand $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau$

Dann ergibt sich für α:

$$\tan\alpha = \frac{1}{G}\tau$$

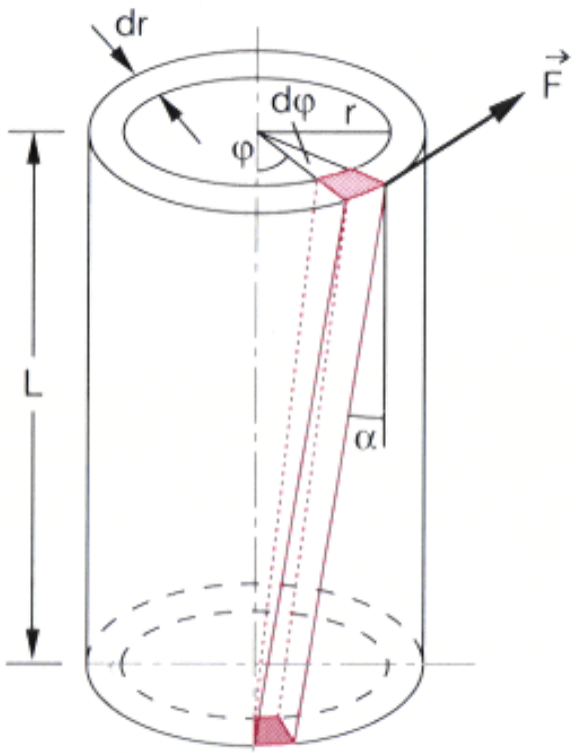
bzw.

$$\tau = G\tan\alpha$$

Torsion eines Drahtes:

Die Torsion kann als Scherung der einzelnen Fasern aufgefasst werden.

Der Verkippungswinkel α ist näherungsweise:



$$\tan\alpha = \frac{r\varphi}{L}$$

Die dafür erforderliche Scherspannung

$$\tau = G\frac{r\varphi}{L}$$

ist für alle Fasern in dem Zylindermantel gleich

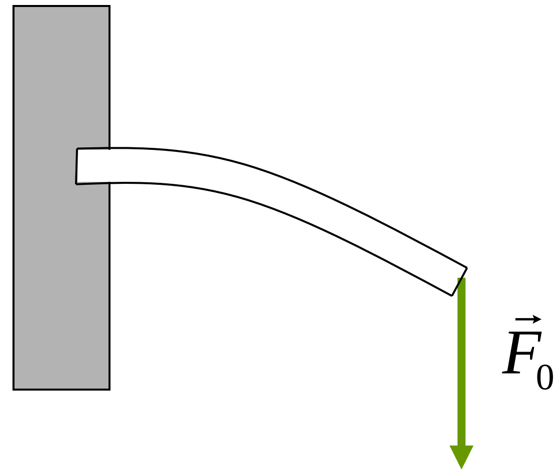
Das dafür erforderliche Drehmoment ist:

$$\mathrm{d}M = r\,\mathrm{d}F = r\,(\tau\,2\pi\,r\,\mathrm{d}r) = G\frac{2\pi\,r^3\varphi}{L}\mathrm{d}r$$

$$M = \frac{2\pi G\varphi}{L}\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{L}\varphi$$

Biegung von Balken

(Länge L, Dicke d, Breite b)

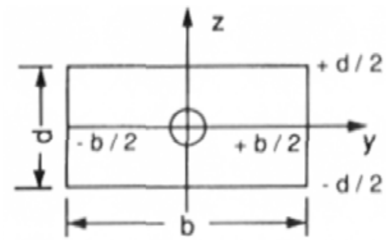


Bei einem Biegeradius r wird die Länge einer Faser bei z:

$$(r+z)\varphi$$

Die Längenänderung gegenüber der neutralen Faser ist:

$$\Delta L(z) = z\varphi = L\frac{z}{r}$$

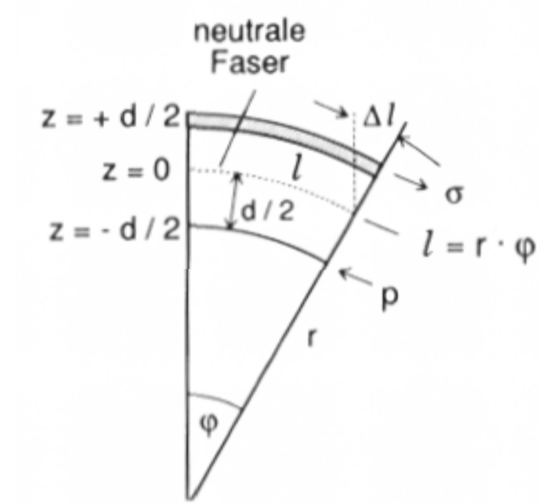


Dazu ist eine Zugspannung notwendig von

$$\sigma_{xx}(z) = E\frac{z}{r}$$

Oben ist σ positiv, unten negativ (Druck).

→ Drehmoment bei z = 0:

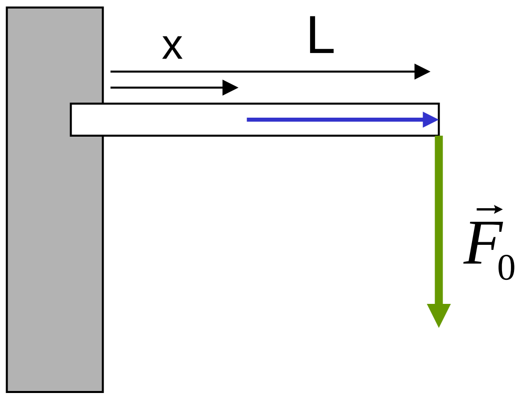


$$\mathrm{d}M(z) = z\,\mathrm{d}F(z) = z\,\sigma_{xx}(z)\,b\,\mathrm{d}z$$

$$M = \frac{bE}{r}\int_{-d/2}^{d/2} z^2\,\mathrm{d}z = \frac{Ed^3b}{12r}$$

Die äußere Kraft F_0 am Balkenende bewirkt das Drehmoment

$$M = F_0(L - x)$$



Bei x erhält man also den Biegeradius:

$$\frac{Ed^3b}{12F_0(L - x)} = r$$

folgt man der Krümmung erhält man (hier ohne Rechnung) am Balkenende die Auslenkung

$$s = \frac{-4L^3}{E\,d^3b}F_0$$

Die stärkste Krümmung (kleinster Radius) ist bei x = 0.

Die stärkste Spannung ist dort an der Oberseite des Balkens (z = d/2)

$$\sigma_{xx} = E\frac{z}{r} = \frac{6F_0L}{d^2b}$$

Der Balken bricht, wenn die Zerreißspannung überschritten wird.

Träger mit beliebigem Querschnitt:

Bei der Berechnung trat ein Integral auf:

$$M = \frac{bE}{r} \int_{-d/2}^{d/2} z^2 \mathrm{d}z = \frac{Ed^3 b}{12r}$$

Ganz ähnlich zu dem Volumenintegral bei Berechnung des Trägheitsmoments

$$J = \rho \int r^2 \, \mathrm{d}V$$

tritt hier das Flächenintegral über die Querschnittsfläche des Trägers auf

$$B = \iint z^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Der Wert *B* wird daher Flächenträgheitsmoment oder Biegemoment genannt.

Die Durchbiegung des einseitig eingespannten Trägers ist dann einfach:

$$s = \frac{L^3}{3E\,B} F_0$$

Körper von allen Seiten unter Druck:

Wirkt ein Druck von allen Seiten gleichermaßen auf einen Körper (z.B: Hydrostatischer Druck), dann ergibt sich durch die Querbeeinflussung eine Volumenänderung von

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\frac{p}{E}(1-2\nu)$$

Man definiert das Kompressionsmodul K und Kompressibilität κ :

$$p = -K\,\frac{\Delta V}{V} \qquad\qquad \kappa = \frac{1}{K}$$

und erhält den Zusammenhang:

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E}(1-2\nu)$$

Desweiteren gilt:

$$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \qquad\qquad \frac{E}{2G} = 1+\nu$$