Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik)

Flüssigkeitsschichten sind frei gegeneinander verschiebbar.

Keine Rückstellkräfte bei Scherung, Torsion; Reibungskräfte möglich.

Nur Volumenänderung liefert Rückstellkraft.

Unter Druck p erfolgt eine Volumenänderung:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa\, p$$

κ : Kompressibilität

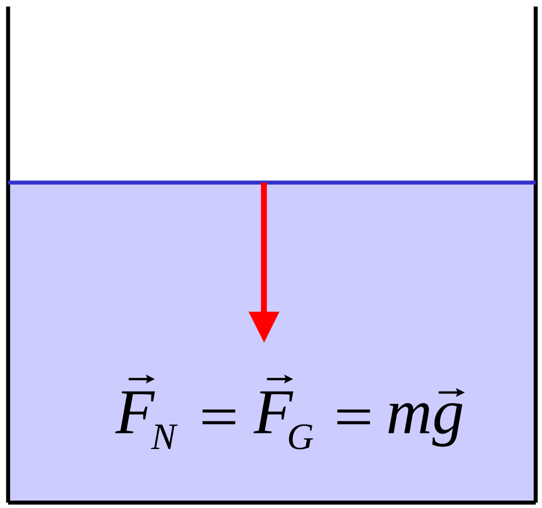
Ideale Flüssigkeit: keine Reibung, keine Oberflächeneffekte

An der Oberfläche treten keine Tangentialkräfte auf.

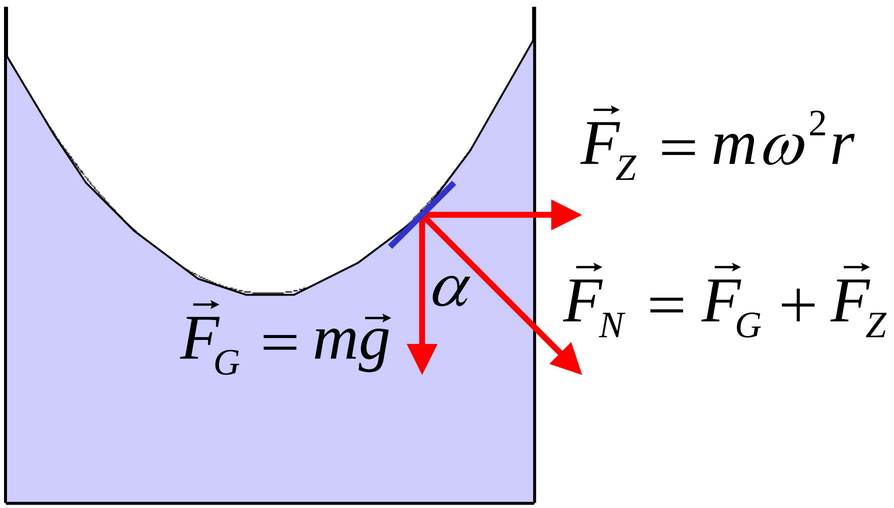
Die Flüssigkeit hat eine Masse (Dichte); dadurch Gewichtskräfte.

An Wänden von Behältern treten keine Tangentialkräfte, aber Normalkräfte auf.

Versuch:



Ruhender Behälter



Rotierender Behälter

$$\tan\alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

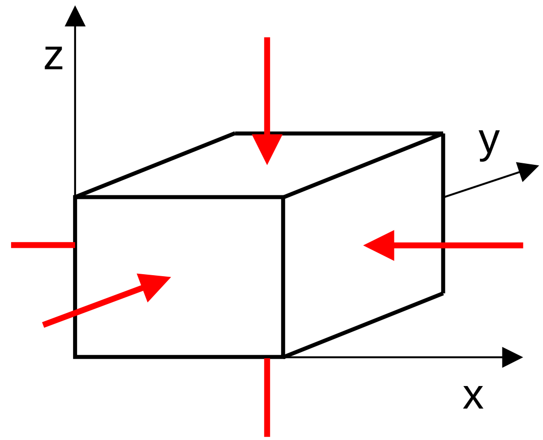
$$z(r) - z(0) = \int_0^r \frac{\omega^2 r'}{g} dr' = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Die Oberfläche ist ein Paraboloid.

Anwendung: Herstellung von Parabolspiegeln

Kraft auf ein Flüssigkeitselement:

Flüssigkeitselement: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$



Die Kraft auf die linke Seite ist:

$$F_x = p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Die Kraft auf die rechte Seite:

$$F_x = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Summe beider Kräfte:

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Analog für y und z-Komponente (erstmal ohne Schwerkraft)

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)\mathrm{d}V = -\mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V$$

Der Druck ist eine skalare Größe!

Die Flüssigkeit ruht, wenn Gesamtkraft = Null

Es folgt

$$\operatorname{grad} p = 0$$ (homogene Dichte)

Der Druck an alle Seitenflächen ist gleich.

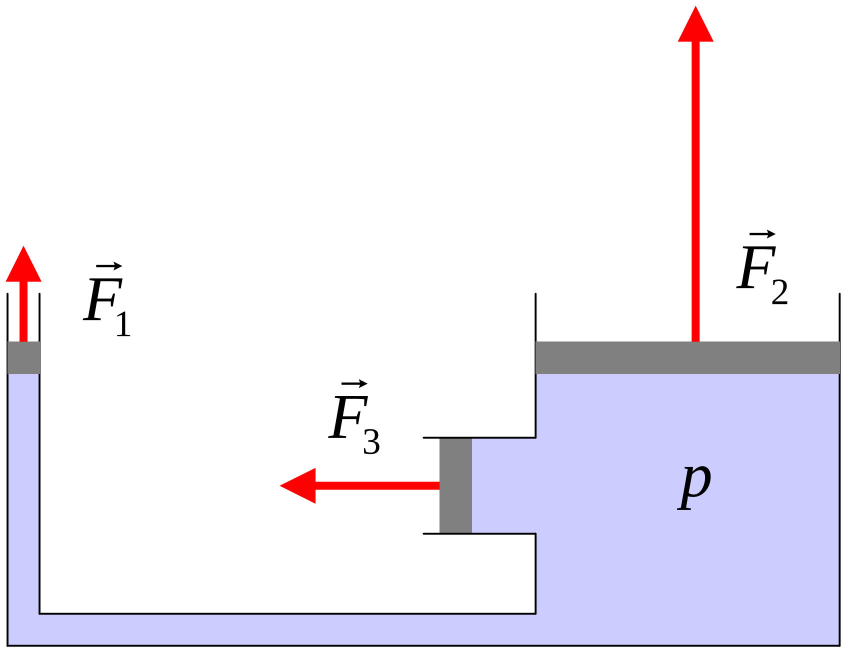
In einer schwerelosen, ruhenden Flüssigkeit ist der Druck überall gleich.

Bei Druck *p* treten Kräfte auf alle Gefäßwände auf.

$$\vec{F}_1 = p\vec{A}_1$$

$$\vec{F}_2 = p\vec{A}_2$$

$$\vec{F}_3 = p\vec{A}_3$$



Kompensationskräfte halten die Schieber in Ruhe.

Anwendung: Hydraulische Pressen

Prinzip: Hebel, Übersetzung

Kraft auf ein Flüssigkeitselement mit Dichte ρ:

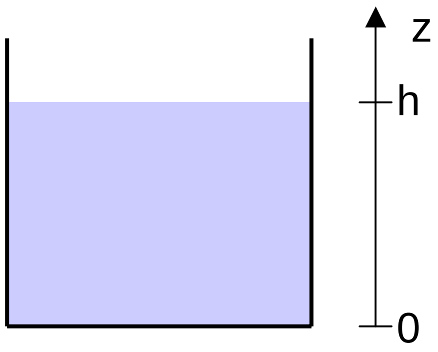
Gesamtkraft auf das ruhende Element kompensiert seine Gewichtskraft

$$(0,0,-g\,\rho\,\mathrm{d}V) - \operatorname{grad} p\,\mathrm{d}V = 0$$

g sei positiv

Es folgt für die z-Komponente

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g$$



Integration liefert:

$$\int_z^h \frac{\partial p}{\partial z'}\mathrm{d}z' = p(h) - p(z) = -\int_z^h \rho\, g\,\mathrm{d}z' = -\rho\, g\,(h-z)$$

$$p(z) = \rho\, g\,(h-z) + p(h)$$

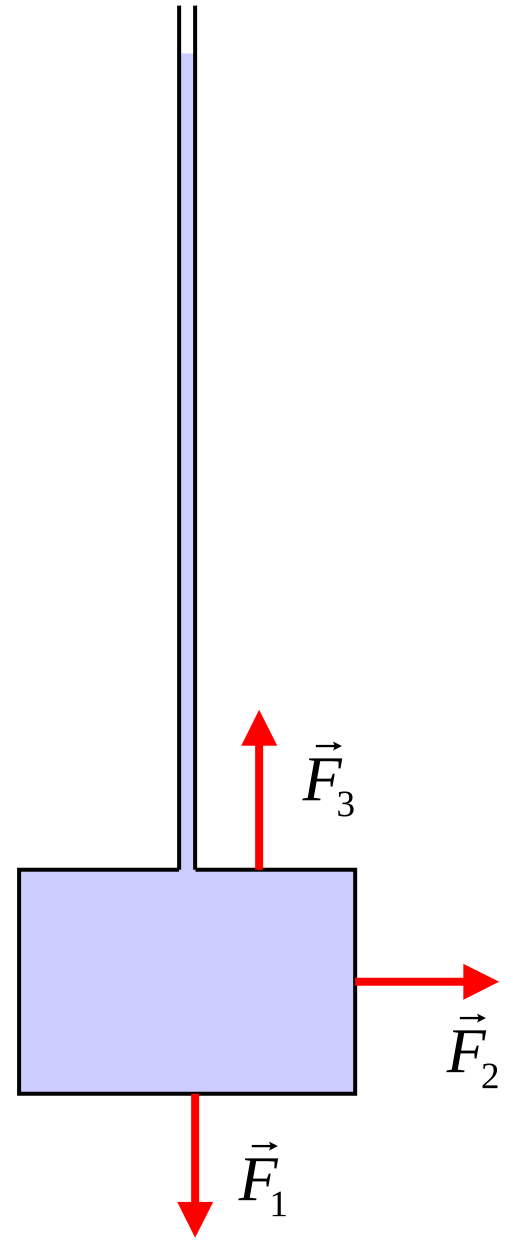
Der Druck nimmt linear mit der Tiefe zu.

Er wirkt auch auf die Seitenwände.

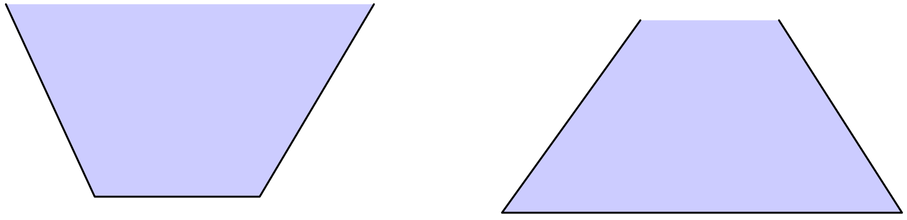
<u>Hydrodynamisches Paradoxon:</u>

Ein dünnes Steigröhrchen erhöht den Druck in einem großen Tank.
Es erzeugt große Kräfte auf große Außenflächen.

Man kann aber nicht viel Arbeit damit leisten,
da der Wasserspiegel bei Verschiebung schnell sinkt.



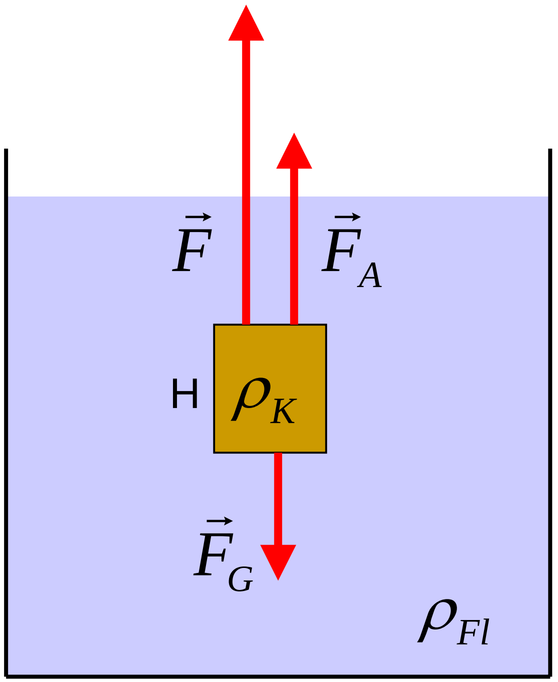
Der Druck auf die Bodenfläche ist in beiden Behältern gleich



Die Kraft auf die Bodenfläche ist bei dem rechten Behälter größer.
Die Kraft auf eine Waage ist aber bei beiden Behältern gleich!
Gewichtskraft Flüssigkeit = Gesamtkraft auf alle Behälterwände.

Auftrieb

Der Druck auf linke/rechte und vordere/hintere Seite ist jeweils gleich (Kräftegleichgewicht).



Der Druck auf obere Seite ist kleiner als auf die untere Seite. Druckdifferenz:

$$\Delta p = \rho_{Fl}\, g\, H$$

Dadurch Kraft nach oben:

$$F = \rho_{Fl}\, g\, H\, A = \rho_{Fl}\, g\, V$$

(neg. Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit)

Dem entgegen wirkt die Gewichtskraft des Körpers (nach unten):

$$F_G = mg = \rho_K\, V\, g$$

Der resultierende Auftrieb ist (nach oben):

$$F_A = (\rho_{Fl} - \rho_K)\, V\, g$$

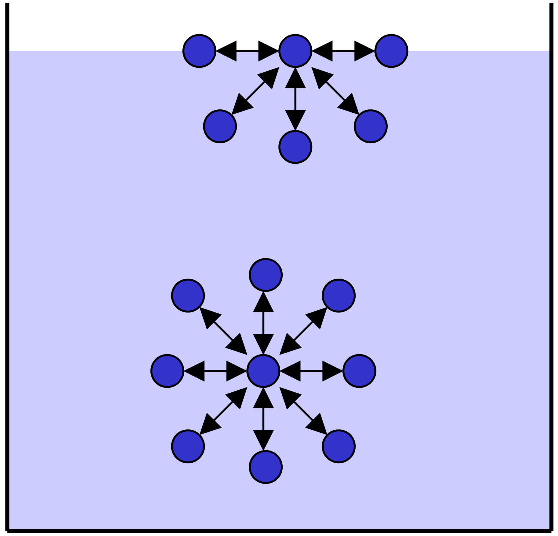
Oberflächen realer Flüssigkeiten

Beim Kondensieren einer Flüssigkeit wird Energie frei (Kondensationswärme) weil die Atome bzw. Moleküle sich anziehen.

An der Oberfläche fehlen Nachbaratome. Dadurch wird beim Hinzufügen eines Oberflächenatoms weniger Energie abgegeben als beim Hinzufügen eines inneren Atoms.

Die verbleibende Energie pro Atom ist also in der Oberfläche größer als im Innern.

Vergrößerung der Oberfläche kostet Energie, d.h. es muss Arbeit verrichtet werden.



Die Energie pro Fläche heißt spezifische Oberflächenenergie:

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

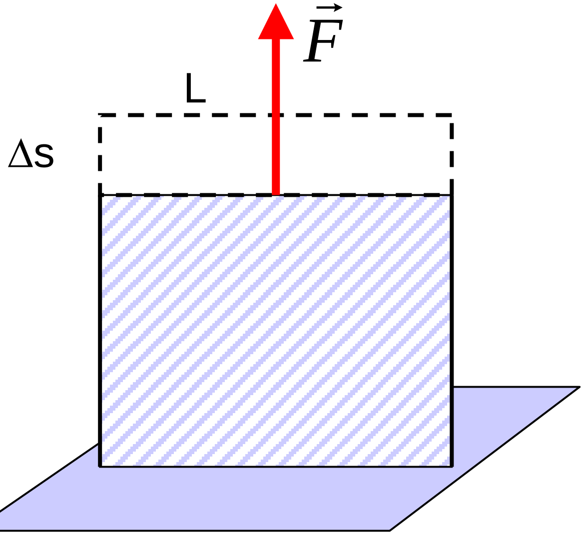
Um die Oberfläche zu vergrößern braucht man die Kraft:

(Beachte: Film hat zwei Oberflächen):

$$\Delta W = F\,\Delta s = \varepsilon 2L\,\Delta s = \varepsilon\,\Delta A$$

Die Zugspannung heißt Oberflächenspannung.

$$\sigma = \frac{F}{2L} = \varepsilon$$



Druck in einem Wassertropfen:

Oberflächenenergie:

$$E = \varepsilon A = 4\pi r^2 \varepsilon$$

Arbeit bei Größenänderung:

$$\Delta W = F\,\Delta s = p\,A\,\Delta s = p\,\Delta V$$

$$\Delta W = p\,4\pi r^2 \Delta r$$

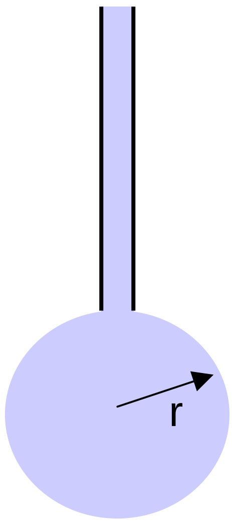
Änderung der Oberflächenenergie:

$$\Delta E = 4\pi((r+\Delta r)^2 - r^2)\varepsilon$$

$$\Delta E = 4\pi(2r\Delta r + \underbrace{\Delta r^2}_{klein})\varepsilon$$

Gleichsetzen liefert:

$$p = \frac{2\varepsilon}{r}$$



Bei Seifenblasen:

wegen Innen+ Außenfläche

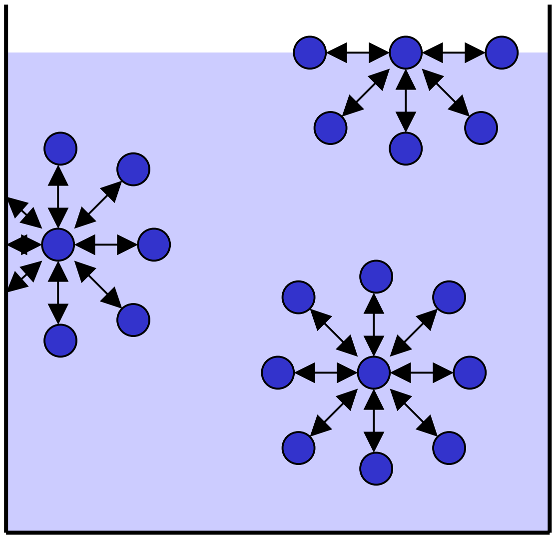
doppelte Oberflächenenergie

$$p = \frac{4\varepsilon}{r}$$

Oberflächen und Grenzflächen:

Wie bei Oberflächen tritt auch bei Grenzflächen eine Energie auf.

Die Bindungskräfte zum anderen Material sind größer oder kleiner als in der Flüssigkeit.



Grenzflächenspannungen :

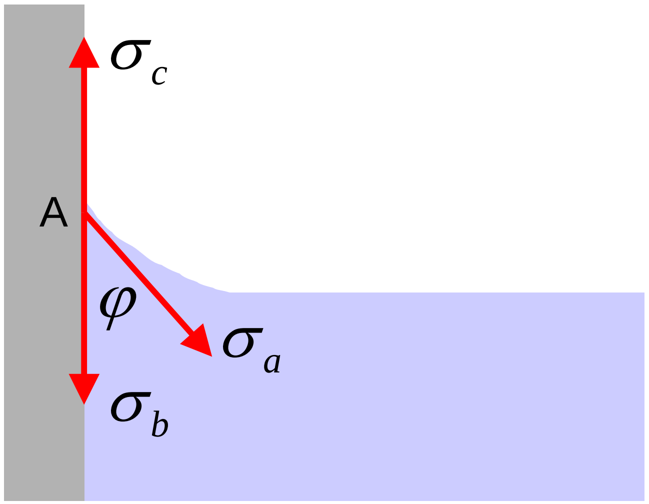
Flüssigkeit-Luft	σ_a
Wand-Flüssigkeit	σ_b
Wand-Luft	σ_c

Der Punkt A ist entlang der Wand verschiebbar

In Ruhe: Kräfte-(Spannungs)-Gleichgewicht

$$\sigma_a \cos\varphi + \sigma_b - \sigma_c = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\sigma_c - \sigma_b}{\sigma_a}$$



Schwerkraft vernachlässigt

Stabilitätsbetrachtung:

Flüssigkeit-Gas: σ > 0 sonst Verdampfen der Flüssigkeit

Flüssigkeit-Flüssigkeit: σ > 0 sonst Durchmischung der Flüssigkeiten

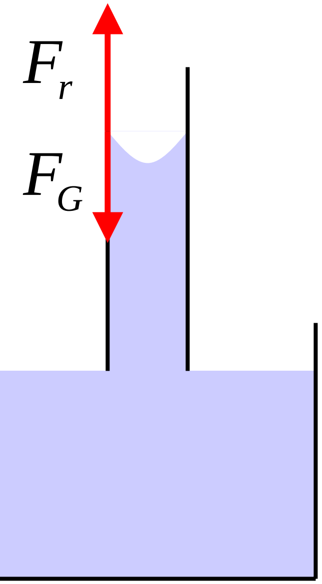
Flüssigkeit-Festkörper: σ beliebig

Wenn $\sigma_c > \sigma_b \quad \Rightarrow \quad \varphi < 90°$ Wasser-Glas-Luft

$\sigma_c < \sigma_b \quad \Rightarrow \quad \varphi > 90°$ Quecksilber-Glas-Luft

Wenn $\sigma_c - \sigma_b > \sigma_a$ vollständige Benetzung der Wand

Kapillarwirkung:



In dünnen Röhren steigt Flüssigkeit auf, wenn $\sigma_c > \sigma_b$

Kräftegleichgewicht: Randkraft = Gewichtskraft:

$$F_R = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}h} = 2\pi r(\sigma_c - \sigma_b) \qquad F_G = \pi r^2 h \rho g$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{2(\sigma_c - \sigma_b)}{r g \rho} = \frac{2\sigma_a \cos\varphi}{r g \rho}$$