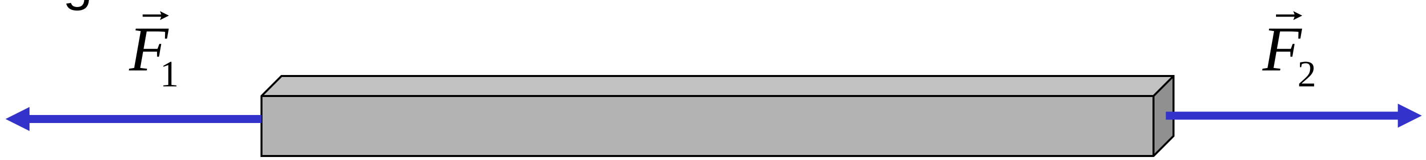
Mechanische Spannung und Elastizität

Wirken unterschiedliche Kräfte auf einen ausgedehnten Körper an unterschiedlichen Orten, dann erfährt der Körper eine mechanische Spannung.



Wir definieren die mechanische Spannung σ in einer Dimension, so dass

$$\boxed{\vec{F} = \sigma \vec{A}}$$

mit der orientierten Querschnittsfläche $\vec{A}$. Die Oberfläche eines Körpers wird immer nach außen orientiert. $\vec{F}$ ist hier die Oberflächenkraft, die von einem anderen Körper ausgeht.

Steht der Körper unter Zugspannung ist σ positiv,

Steht der Körper unter Druckspannung ist σ negativ.

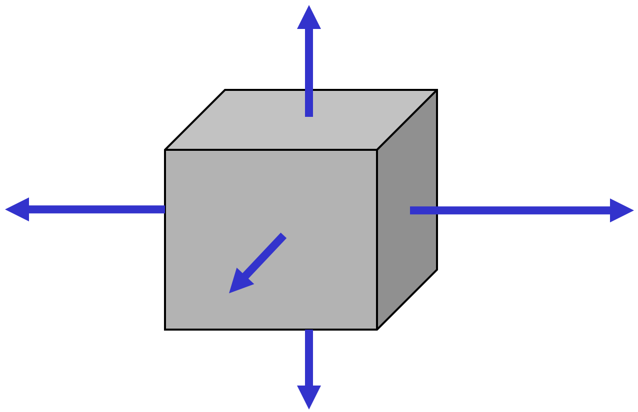
Die Einheit der Spannung ist N/m²

Druckspannung:

Die Kräfte greifen jeweils an den Oberflächen an. Ist σ negativ, zeigen die Kräfte ins Innere des Körpers, während die Oberfläche immer nach außen orientiert ist.

<u>Mechanische Spannung dreidimensional:</u>

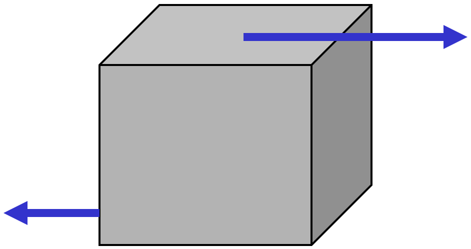
Unabhängig von der Spannung in x-Richtung kann ein Körper unter Spannung in y und z-Richtung stehen:



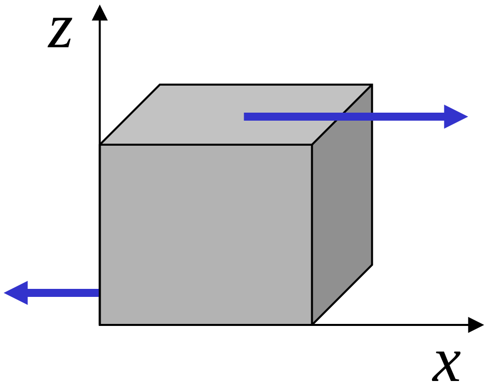
Die Spannungen können in jeder Richtung unterschiedlich sein. Man benötigt daher zur Beschreibung eine Matrix:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \vec{A}$$

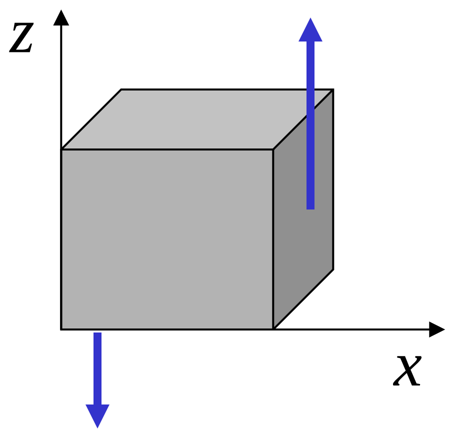
Neben den sogenannten Normalspannungen (Zug- und Druckspannung) gibt es Scherspannungen



Sie ergeben sich durch Oberflächenkräfte, die von anderen Körpern ausgehen und tangential an den Flächen angreifen.



$$F_x = \tau_{xz} A_z$$



$$F_z = \tau_{zx} A_x$$

Alle möglichen Scherspannungen können in der Matrix zusammengefasst werden. Man spricht von dem *Spannungstensor* :

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \vec{A}$$

Unter der Voraussetzung, dass die angreifenden Kräfte nicht zu einer Drehbeschleunigung (vgl. Kapitel Rotation) des Körpers führen, ist der Spannungstensor symmetrisch.

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Dies ist insbesondere in der Statik der Fall.

Der Spannungszustand eines Körpers wird dann durch 6 unabhängige Werte beschrieben.

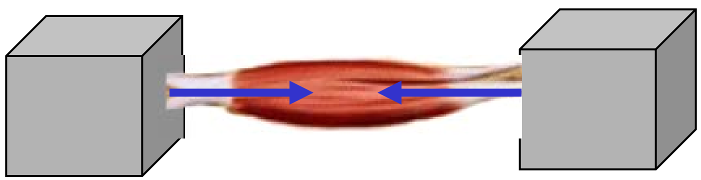
$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \vec{A}$$

Im allgemeinen Fall sind die Spannungen ortsabhängig. Dann muss für jeden Raumpunkt ein Spannungstensor angegeben werden, um den Spannungszustand des Körpers zu beschreiben.

Kräfte, Spannungen und der menschliche Körper

<u>Erzeugung:</u>

Muskeln können aktiv eine mechanische Zugspannung im Muskel erzeugen. An der Oberfläche, d.h. an den Enden des Muskels übt der Muskel dadurch Kräfte auf andere Körper aus.



Kräfte des Muskels auf die Würfel

Kräfte der Würfel auf den Muskel

Durch die Kombination von Muskeln und Knochen können auch Druck- und Scherspannungen in Körperteilen erzeugt werden. Der Spannungszustand (Spannungstensor) ist dabei im Körper ortsabhängig.

Sinneswahrnehmung:

Der menschliche Körper hat einen Sinn für mechanische Spannung im eigenen Körper. Man fühlt Spannungen und nicht Kräfte!

Beispiel 1: Im freien Fall wirkt eine Gesamtkraft auf den Körper, aber er ist spannungsfrei, da die Gravitationskraft auf jedes Massenelement gleich wirkt. In der Schwerelosigkeit fühlt man die Gravitation nicht, da keine Spannung im Körper vorhanden ist.

Beispiel 2: Man steht auf dem Boden. Es wirkt die Gewichtskraft auf jedes Massenelement und eine Kraft vom Boden auf die Fußsohlen. Die Gesamtkraft auf den Körper ist null. Im Körper ist eine Druckspannung, die in den Beinen besonders groß ist. Diese Druckspannung fühlt man.

Wenn Oberflächenkräfte wirken, resultieren immer Spannungen im Körper.

Wirken nur homogene Volumenkräfte resultiert keine Spannung im Körper (Schwerelosigkeit).

Sind die Volumenkräfte ortsabhängig, dann resultieren Spannungen im Körper (Gezeitenkräfte, rotierende Körper, etc.)

Elastische Verformungen eindimensional

Elastische Körper verformen sich unter Spannung. Die Dehnung ε ist proportional zur Spannung

$$\boxed{\sigma = E\,\varepsilon}$$

Hookesches Gesetz eindimensional

mit dem *Elastizitätsmodul E*. Je größer das Elastizitätsmodul, umso geringer die Dehnung bei vorgegebener Spannung. Die Einheit von *E* ist N/m²

Die Dehnung ist eine relative Längenänderung

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

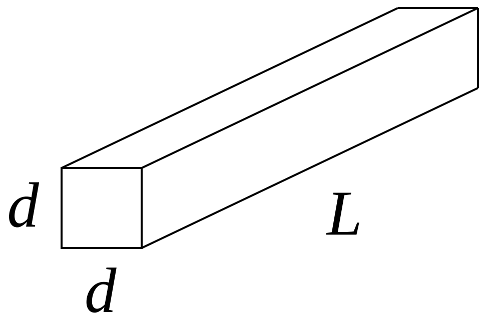
ohne Einheit.

Querkontraktion

Bei elastischen Körpern tritt eine Verformung senkrecht zur Spannung auf.

Bei Dehnung wird ein Stab dünner

$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta L}{L}$$



Mit der <u>Poissonzahl</u> ν (=Querkontraktionszahl).

Die Poissonzahl hat in der Regel Werte zwischen 0 und 0,5.

Zeigt die x-Achse entlang des Stabes, dann kann man schreiben

$$\varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x$$

Die Querkontraktion führt im Allgemeinen nicht zu einer Erhaltung des Volumens sondern es gilt:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x (1 - 2\nu)$$

Elastische Verformungen dreidimensional

Durch die Querkontraktion ergibt sich eine komplizierte Kopplung zwischen den Dehnungen in x-, y- und z-Richtung.

Neben den Dehnungen treten Scherungen auf. Der Dehnungszustand des Körpers wird ebenso wie die Spannung durch einen Tensor beschrieben

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

In dem s.g. *Verzerrungstensor* sind ε_{xx} , ε_{yy} und ε_{zz} Dehnungen und die anderen Komponenten Scherungen.

Das Hooksche Gesetz verbindet den Spannungstensor mit dem Verzerrungstensor durch einen Tensor vierter Stufe:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \sigma_{kl}$$

Verallgemeinertes Hookesches Gesetz dreidimensional

Die Doppelsumme läuft dabei jeweils über die drei Koordinaten x, y und z.

Der *Elastizitätstensor* C_{ijkl} hat 81 Komponenten. In einer statischen Situation sind davon 21 Komponenten unabhängig. Diese 21 Werte charakterisieren die elastischen Eigenschaften eines homogenen, anisotropen Materials im allgemeinsten Fall (z.B. Kohlefaser)

Bei isotropen Materialien reduziert sich die Zahl der unabhängigen Parameter auf 2 (Elastizitätsmodul und Poissonzahl) aus denen die Elemente des Tensors berechnet werden.

$$C_{ijij} = \frac{1+\nu}{E} \qquad C_{iikk} = -\frac{\nu}{E}$$

Die übrigen Komponenten des Tensors sind null.

Einen Eindruck von der Komplexität der Elastizitätstheorie gewinnt man aus Büchern zur „Technischen Mechanik“.

Vgl. u.A auch: Rudolph Stark, Festigkeitslehre, Springer-Verlag (online verfügbar)

Verzerrungsenergie

Die Verzerrungsenergie eines deformierten Körpers ist gegeben durch

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{Volumen} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V$$

Man erkennt, dass in allen Arten der Verformung (Dehnung und Scherung) Energie gespeichert ist.

Im Falle eines dünnen Stabes ergibt sich, unter Vernachlässigung der Querkontraktion für die Verzerrungsenergie:

$$W = \frac{1}{2} \int_{Volumen} \sigma_x \varepsilon_x \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_{Volumen} \frac{\sigma_x^2}{\mathrm{E}} \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_{Volumen} \mathrm{E} \varepsilon_x^2 \mathrm{d}V$$

Im einfachsten Fall bei gleichmäßiger Spannung über das ganze Volumen *V* ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{\mathrm{E}} V = \frac{1}{2} \mathrm{E} \varepsilon_x^2 V$$

Überschreiten der Elastizitätsgrenze

Ab einer bestimmten Spannung wird die Deformation eines Materials nicht mehr gut durch einen linearen Zusammenhang beschrieben.

Bei weiter zunehmenden Kräften auf das Material tritt irreversible Verformung ein. Man spricht von der s.g. *Fließgrenze*.