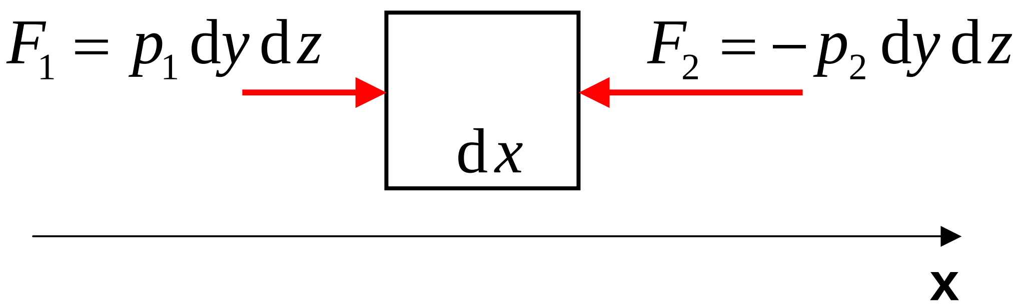
Strömende Flüssigkeiten

Man zerlegt die Flüssigkeit in kleine Volumenelemente ΔV.

Die Bewegung der Massen $\Delta m = \rho\,\Delta V$ wird durch die Kräfte auf das Volumenelement bestimmt und mit dem Aktionsprinzip berechnet.

Gewichtskraft: $$\vec{F}_g = \rho\,\vec{g}\,\mathrm{d}V$$

Kräfte durch Druckunterschiede: $$\vec{F}_p = -\mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V$$



$$F_x = F_1 + F_2 = -(p_2 - p_1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}V$$

Bereiche höherer Dichte werden nach unten beschleunigt.

Besteht ein Druckunterschied zwischen links und rechts wird das Volumenelement seitwärts beschleunigt (oben/unten, vorn/hinten ebenso).

Zusätzlich wirken Reibungskräfte zwischen Volumenelementen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten.

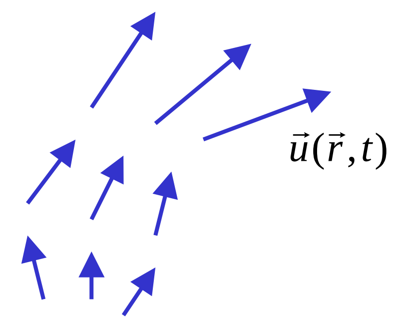
Gesamtkraft auf das Volumenelement die beschleunigt:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_R$$

Beschreibung der Flüssigkeits-Bewegung durch Angabe der Geschwindigkeit

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(x,y,z,t)$$

an jedem Ort zu jeder Zeit (Strömungsfeld).



Hängt $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(\vec{r})$ nicht explizit von der Zeit ab, spricht man von einer stationären Strömung.

<u>Beschleunigung eines Volumenelementes:</u>

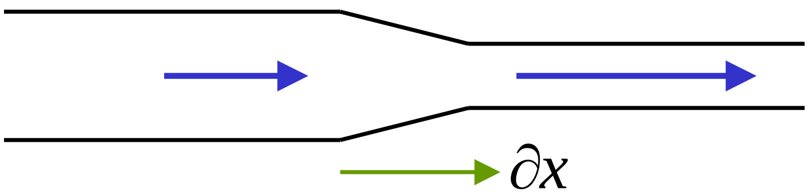
<u>1. in stationärer Strömung:</u>

Das Volumenelement gelangt in der Zeit Δt von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + \vec{u}\Delta t$

dort hat es ggf. eine andere Geschwindigkeit. $\rightarrow$ Beschleunigung

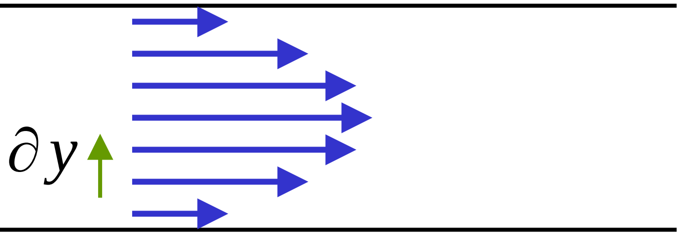
Beispiel Beschleunigung in x-Richtung bei Verschiebung in x-Richtung:

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x$$



Beispiel Beschleunigung in x-Richtung bei Verschiebung in y-Richtung:

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y$$



Alle möglichen Verschiebungen zusammen ergeben:

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z$$

2. in zeitabhängiger Strömung:

Zusätzlich kann das Strömungsfeld noch explizit von der Zeit abhängen.

Allgemein gilt für die Beschleunigung in x-Richtung:

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z$$

Mit der Abkürzung (Nabla)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{u}$$

Des Volumenelement wird bescheunigt, wenn die Geschwindigkeit am selben Ort zunimmt oder wenn es in einen Bereich höherer Geschwindigkeit verschoben wird.

Bewegungsgleichung für Flüssigkeit ohne Reibung:

(Euler-Gleichung)

Aktionsprinzip

$$\underbrace{\rho\,\mathrm{d}V}_{m}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{a}} = \vec{F}_g + \vec{F}_p$$

L. Euler, 1755

Beschleunigung und Kräfte einsetzen:

$$\rho\,\mathrm{d}V\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}\right) = \rho\,\mathrm{d}V\,\vec{g} - \mathrm{grad}\,p\;\mathrm{d}V$$

liefert:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u} \;=\; \vec{g} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p}$$

Euler-Gleichung

Um die Flüssigkeit vollständig zu beschreiben muss man für jeden Punkt Geschwindigkeit und Dichte bzw. Druck angeben.

$\vec{u}(\vec{r},t)$ Strömungsfeld = Vektorfeld

$\rho(\vec{r},t)$ Dichteverteilung = skalares Feld

Zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Strömung muss auch eine Dgl. für die Dichte aufgestellt werden: <u>Kontinuitätsgleichung</u>

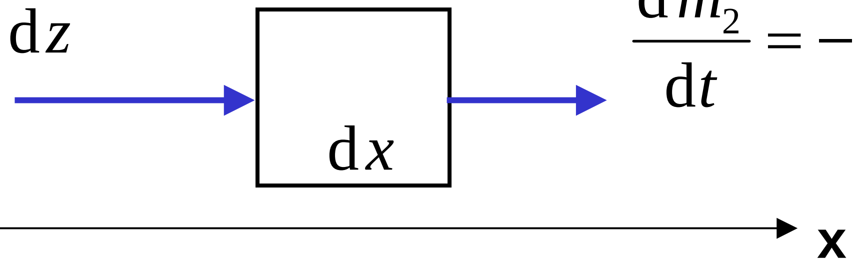
Zufluss/Abfluss-Bilanz für Volumenelement:

Zufluss

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \rho u_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Abfluss

$$\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = -\rho u'_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = -\rho(u'_x - u_x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}\,\mathrm{d}V$$

Berücksichtigung der anderen Seiten liefert:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

dadurch ändert sich die Dichte in dem Volumenelement: $\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

Die Klammer bezeichnet man als <u>Divergenz</u>

= Quellstärke eines Vektorfeldes

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}}$$

Kontinuitätsgleichung

Dichte im Volumenelement nimmt zu, wenn mehr zufließt als abfließt.

Dichte im Volumenelement nimmt ab, wenn mehr abfließt als zufließt.

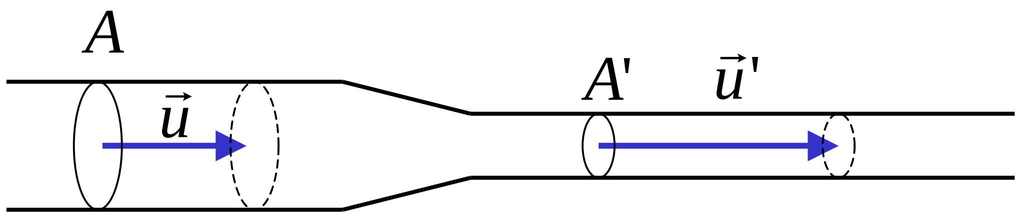
Stationäre Strömungen in Rohren ohne Reibung

Flüssigkeit sei inkompressibel also $\rho(\vec{r}, t) = \text{const.}$

Der Massenstrom ist überall im Rohr gleich (analog zum elektr. Strom).
Gilt, weil es bei Inkompressibilität keine Quellen oder Senken gibt

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Im Zeitelement d*t* tritt durch die Fläche A die gleich Masse dm, wie durch die Fläche A'



$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho A \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho A u_x = \rho A' u'_x$$

$A' < A$ also muss $u'_x > u_x$ sein: $\quad \dfrac{u_x}{u'_x} = \dfrac{A'}{A}$

Berechnung des Druckes bei solchen Strömungen:

Eulersche Gleichung war

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

Keine Abhängigkeiten von *t, y, z,* da stationär, ohne Reibung und *g* = 0.

Ableitungen nach *t, y, z* sind Null.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

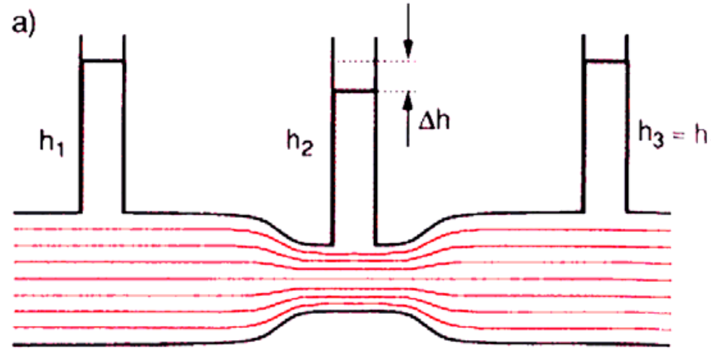
Integrieren:

$$\int u_x \mathrm{d}u_x = -\frac{1}{\rho}\int \mathrm{d}p \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u_x^2 = -\frac{1}{\rho}\,p + \text{const.}$$

$$\boxed{p + \tfrac{1}{2}\rho u^2 = \text{const.}}$$

Bernoulli-Gleichung

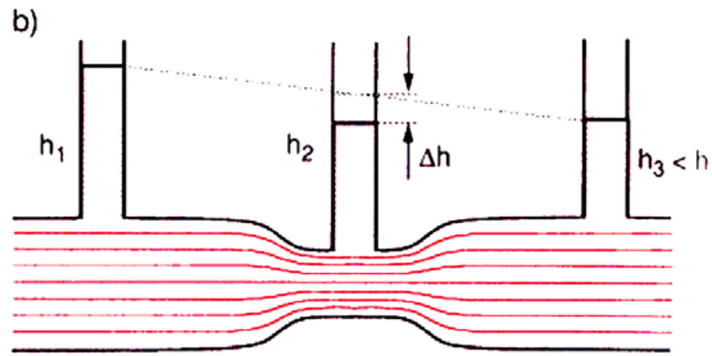
p ist der statische Druck, $\tfrac{1}{2}\rho u^2$ heißt Staudruck



Versuch:

Der Druck wird mit Steigrohren gemessen.

Im Bereich großer Geschwindigkeit ist der Druck kleiner (Bild a).



Mit Reibung (Bild b): Der Druck nimmt zusätzlich kontinuierlich zum Abfluss hin ab.

Energiebetrachtung:

In dem Volumen ΔV ist die elastische Energie

$$E_{elast} = p\Delta V$$

gespeichert. Bei der Geschwindigkeit u hat ΔV die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\rho u^2 \Delta V$$

Energieerhaltung liefert:

$$E_{elast} + E_{kin} = p\Delta V + \tfrac{1}{2}\rho u^2 \Delta V = \text{const.}$$

Rohre mit Höhenunterschied:

Zu elastischer und kinetischer Energie kommt noch potentielle Energie:

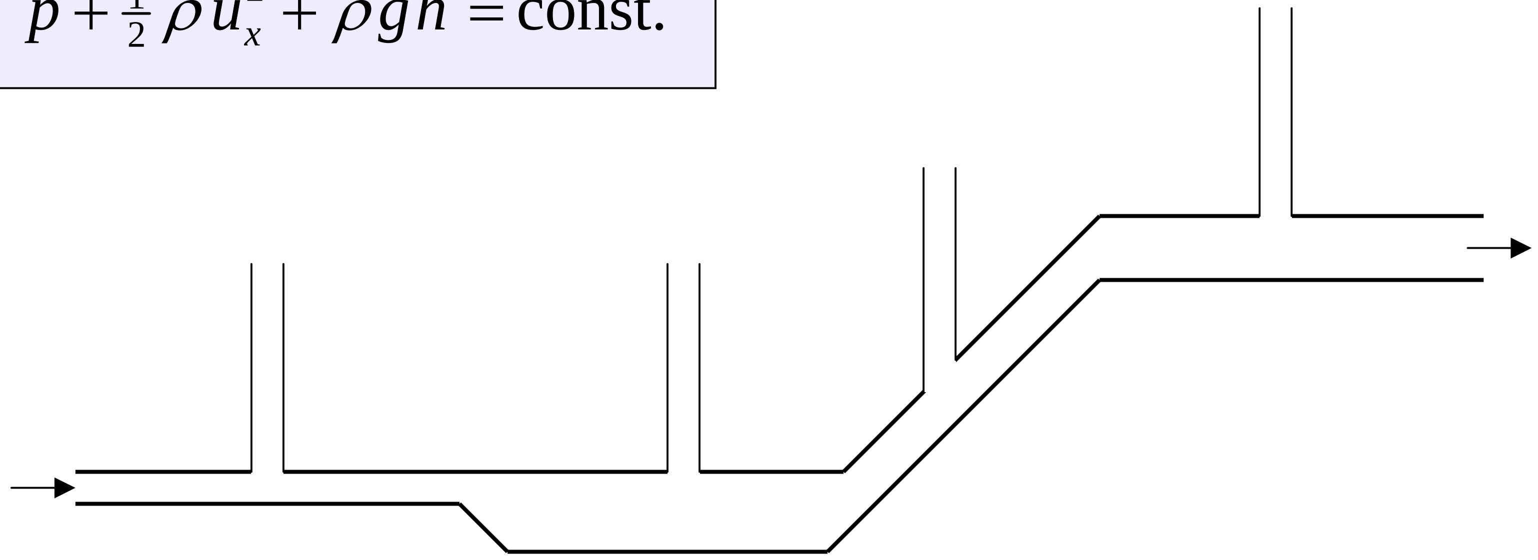
$$E_{pot} = \rho g h \Delta V$$

Energieerhaltung liefert:

$$E_{elast} + E_{kin} + E_{pot} = p\Delta V + \tfrac{1}{2}\rho u^2 \Delta V + \rho g h \Delta V = \text{const.}$$

also

$$\boxed{p + \tfrac{1}{2}\rho u_x^2 + \rho g h = \text{const.}}$$



Hydrodynamisches Paradoxon

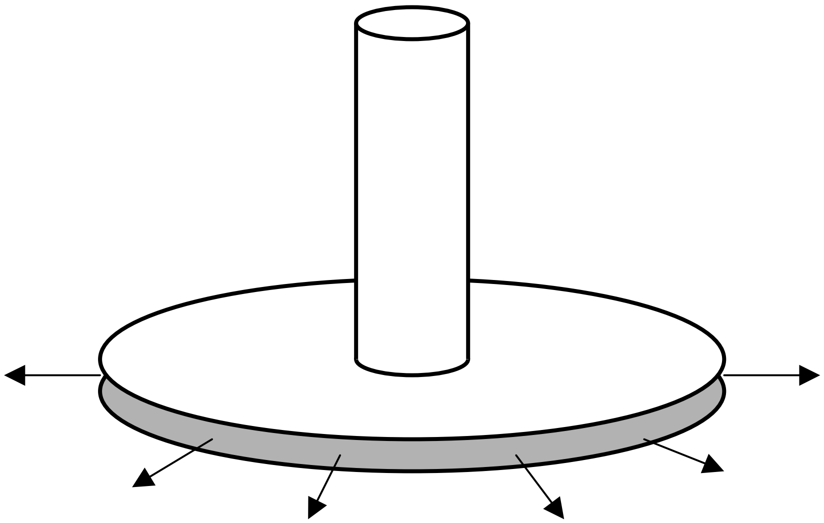
Die schnelle Strömung zwischen den beiden Platten erzeugt Unterdruck:

Umgebungsdruck: $p + 0 = p_0$

Druck zwischen Scheiben:

$$p + \tfrac{1}{2}\rho u^2 = p_0$$

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho u^2$$



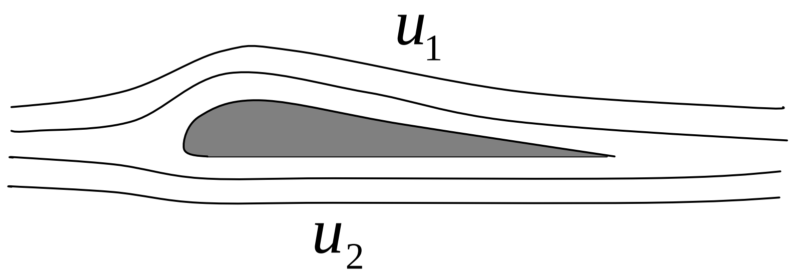
Unterdruck: $-\tfrac{1}{2}\rho u^2$

Die Scheibe schwebt, wenn:

$$\tfrac{1}{2}\rho u^2 A > mg$$

Dynamischer Auftrieb beim Fliegen:

Um einen Flugzeugflügel strömt die Luft entlang der Oberseite einen längeren Weg als entlang der Unterseite.



Dadurch oben schnelleres Strömen. $u_1 > u_2$

Druck oben: $p_1 = p_0 - \frac{1}{2}\rho u_1^2$

Druck unten: $p_2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho u_2^2$

Die Druckdifferenz zwischen oben und unten erzeugt eine Kraft nach oben:

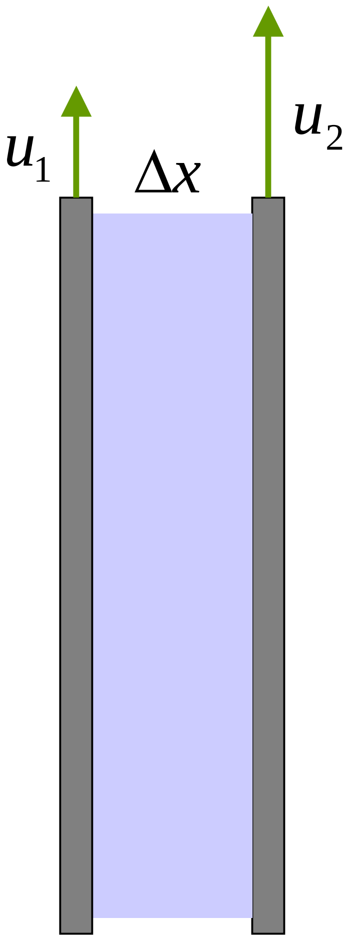
$$F \approx \frac{1}{2}\rho(u_1^2 - u_2^2)A$$

Durch die Reibung an der Tragfläche ist der Prozess etwas komplizierter.

Reibung in Flüssigkeiten:

Zwei Platten mit einer Flüssigkeitsschicht dazwischen werden gegeneinander verschoben.

Wegen Reibung in der Flüssigkeit benötigt man die Kraft:



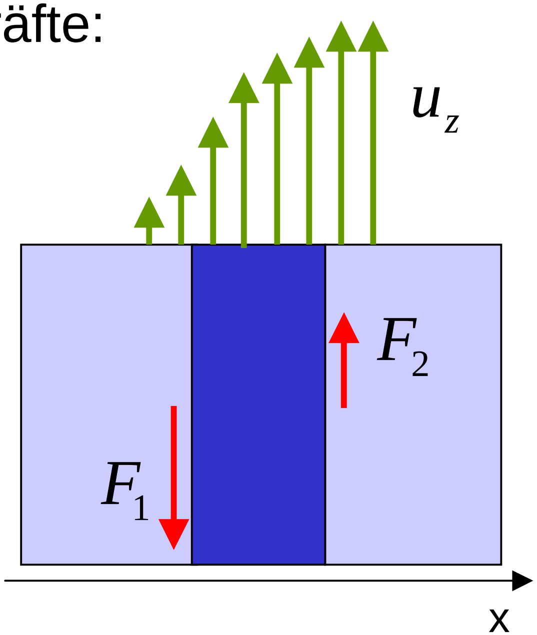
$$F = \eta A \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} \quad = \eta A \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}$$

η : Viskosität oder Zähigkeit, Einheit: $[\eta]$ = N s / m^2 = Pa s

Flüssigkeit	η / mPa s		
	T=20°	T=0°	T=100°
Wasser	1.00	1.79	0.282
Benzol	0.65		
Ethanol	1.20		
Glyzerin	1480	12000	15
Quecksilber	1.55		

Reibungskräfte in einem Strömungsfeld:

Volumenelement ΔV erfährt links und rechts Reibungskräfte:



$$F_1 = -\eta \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \left.\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}\right|_x$$

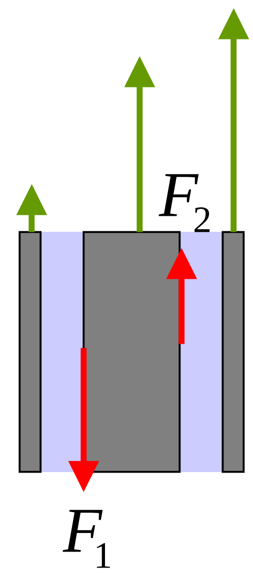
$$F_2 = \eta \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \left.\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}\right|_{x+\mathrm{d}x}$$

Zusammen ergibt dies

$$F_z = F_1 + F_2$$

Addieren und erweitern mit d*x* liefert:

$$F_z = \eta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \frac{\left.\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}\right|_x}{\mathrm{d}x}$$



Der Differenzenquotient ergibt gerade die zweite Ableitung von u_z nach dx

$$\frac{\left.\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x}\right|_{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

Also:

$$F_z = \eta \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}^2 u_z}{\mathrm{d}x^2}$$

Dies ist aber noch nicht die gesamte Kraftkomponente in z-Richtung,

da auch Geschwindigkeitsänderungen in y und z-Richtung ebenso beitragen.

Insgesamt ergibt sich für die z-Komponente der Reibungskraft:

$$F_z = \eta \,\mathrm{d}V \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$$

Die anderen Komponenten der Reibungskraft erhält men ebenso

$$F_x = \eta \; \mathrm{d}V \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

$$F_y = \eta \; \mathrm{d}V \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right)$$

$$F_z = \eta \; \mathrm{d}V \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$$

Diese Formel lässt sich abgekürzt mit dem <u>Laplaceoperator</u> schreiben

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Die Reibungskraft lautet abgekürzt:

$$\boxed{\vec{F}_R = \eta \, \Delta \vec{u} \, \mathrm{d}V}$$

Achtung: Delta bedeutet hier den Laplaceoperator!

Navier-Stokes Gleichung

Differentialgleichung für die Bewegung einer viskosen Flüssigkeit:

$$\underbrace{\rho\,\mathrm{d}V}_{m}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{a}} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_R$$

Aktionsprinzip

$$\rho\,\mathrm{d}V\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}\right) = \rho\,\mathrm{d}V\,\vec{g} - \mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V + \eta\,\Delta\vec{u}\,\mathrm{d}V$$

Wir teilen durch dV und erhalten die Navier-Stokes Gleichung

$$\boxed{\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\,(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u} = \rho\,\vec{g} - \mathrm{grad}\,p + \eta\,\Delta\vec{u}}$$

Analog zur Euler-Gleichung aber mit Reibung

Navier-Stokes Gleichung veranschaulicht an einer Menschenmenge

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\,(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \rho\,\vec{g} - \mathrm{grad}\,p + \eta \Delta \vec{u}$$

Ihre Geschwindigkeit ändert sich $\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$

weil Sie in einen Berech geschoben werden,
wo die Leute schneller laufen $\rho\,(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$

weil es bergab geht $\rho\,\vec{g}$

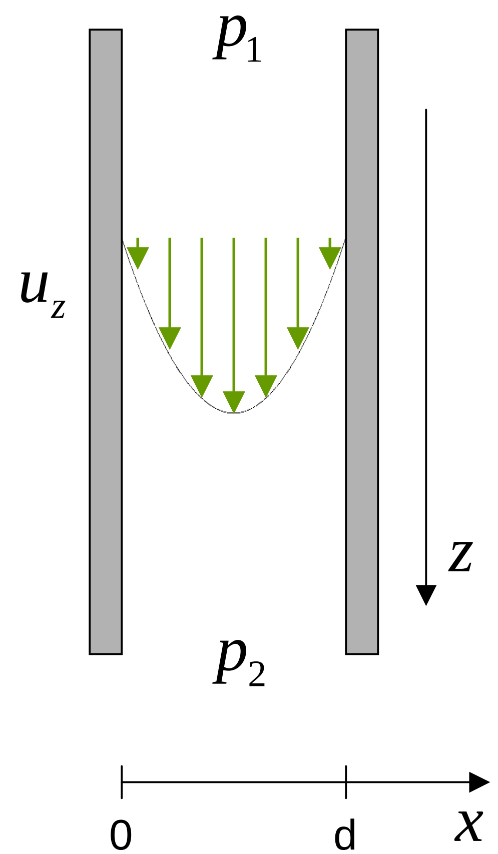
weil auf der einen Seite mehr gedrängelt wird
als auf der anderen Seite $-\mathrm{grad}\,p$

weil Sie von den an Ihnen vorbeiströmenden
Leuten mitgerissen werden $\eta \Delta \vec{u}$

Laminare Strömungen

Laminare Strömung zwischen zwei Wänden:

Kraft auf die Stirnfläche eines Volumenelementes aufgrund eines Druckunterschieds



oben $$F_z(z) = p(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

unten $$F_z(z+\mathrm{d}z) = p(z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}F_z = -\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z$$

Reibungskraft:

$$\mathrm{d}F_z = \eta\,\mathrm{d}V\,\Delta u_z = \eta\,\mathrm{d}V\,\frac{\mathrm{d}^2 u_z}{\mathrm{d}x^2}$$

Bei einer stationären Strömung sind beide Kräfte gleich

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_z}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{\eta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

Lösen durch integrieren:

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + c_1$$

$$\Rightarrow \quad u_z = -\frac{x^2}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + c_1 x + c_2$$

Aus den Randbedingungen erhält man die Konstanten c_1 und c_2

$$u_z(0) = 0 = c_2$$

$$u_z(d) = 0 = -\frac{d^2}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + c_1 d \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{d}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist parabelförmig.

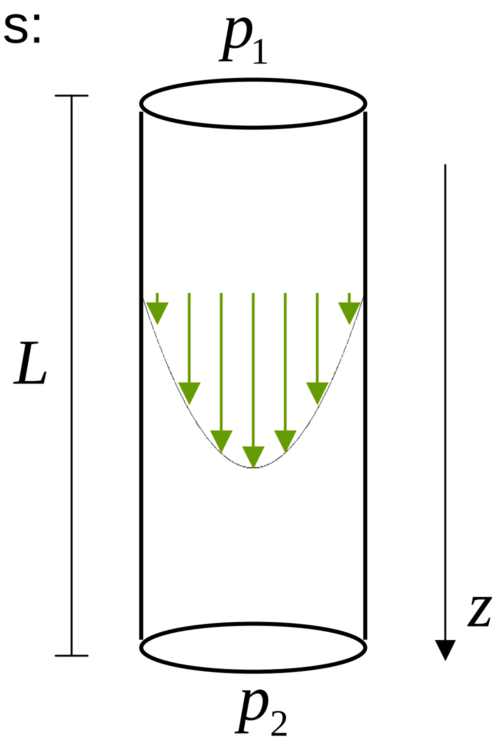
$$u_z = -\frac{x^2 - xd}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

Laminare Strömung in kreisförmigen Rohren: Hagen-Poiseuille Gesetz

$$\Delta u_z = -\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten sieht anders aus:

$$\Delta u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \underbrace{\text{Ableitungen nach } \varphi \text{ und } z}_{=0}$$



Es folgt:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

$$\Rightarrow \quad r\frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{r^2}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + c_1$$

$c_1 = 0$ weil $\left.\frac{\partial u_z}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$

$$\Rightarrow \quad u_z = -\frac{r^2}{4\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + c_2$$

Es folgt aus der Randbedingung $u_z(R) = 0$:

$$u_z = \frac{R^2 - r^2}{4\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

Berechnung des Durchflusses durch ein Rohr mit Länge L:

$$\frac{V}{t} = \int_0^R 2\pi r\, u_z \mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi r \frac{R^2 - r^2}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}\mathrm{d}r$$

$$\frac{V}{t} = \frac{2\pi}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}\left[\tfrac{1}{2} r^2 R^2 - \tfrac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{R}$$

$$\boxed{\frac{V}{t} = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}R^4}$$

<u>Hagen-Poiseuille Gesetz</u>

Turbulente Strömungen

Reynoldssche Zahl:

Wir schreiben die Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \vec{u}$$

um und vernachlässigen die Schwerkraft:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}$$

Linearen Transformation von Zeit und Länge liefert dimensionslose DGL.

$$t = T\, t' \qquad l = L\, l' \qquad \vec{u} = \vec{u}' \frac{L}{T} \qquad p = p' \frac{L^2}{T^2} \rho$$

(kleine Buchst. mit Strich dimensionslos, große Buchst. fest mit Dimension)

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{u}' = -\operatorname{grad}' p' + \underbrace{\frac{\eta T}{\rho L^2}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}} \Delta' \vec{u}'$$

dimensionslose Reynolds-Zahl

Mit neuer Zeit und Längenskala gemessene Strömungen sind ähnlich zu den ursprünglichen Strömungen, wenn die Reynolds-Zahl gleich ist.

Anwendung: Strömungen um Schiffsmodelle in Zeitlupe betrachtet.

Interpretation der Reynolds-Zahl: $\mathrm{Re} = \frac{\rho L^2}{\eta T} = \frac{\rho U L}{\eta}$

erweitern mit $L^2 U$ liefert:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L^3 U^2}{\eta L^2 U} = \frac{2E_{\mathrm{kin}}}{W_{\mathrm{Reibung}}}$$

Die Reynolds-Zahl bietet eine <u>Kriterium um Strömungen einzustufen</u>:

Kleine Reynolds-Zahl = starke Reibung $\rightarrow$ laminare Strömung

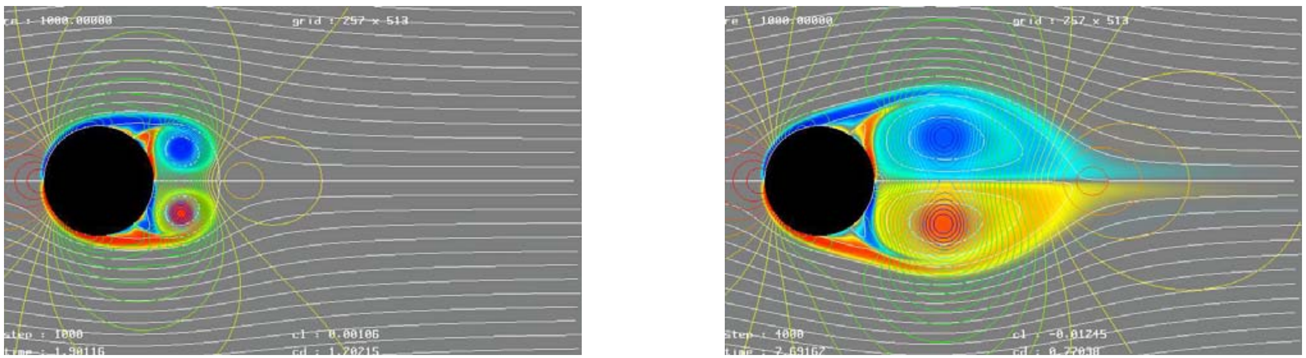
große Reynolds-Zahl = viel kinetische Energie $\rightarrow$ turbulente Strömung

Wirbel

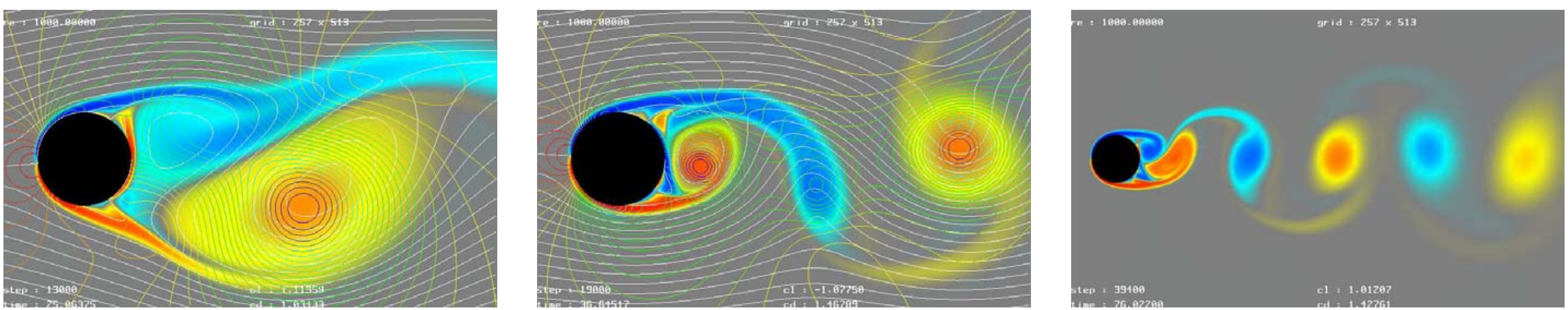
In reibungsfreien Flüssigkeiten wird die Gesamtwirbelstärke erhalten (Helmholtzsche Wirbelsätze). Entspricht dem Drehimpulserhaltungssatz.

Bildung von Wirbeln ist nur in Flüssigkeiten mit Reibung möglich.
Bevorzugte Bildung an Hindernissen im Strömungsfeld.

Wirbelbildung an umströmter Kugel. Reynoldszahl = 1000



Ablösen der Wirbel und Bildung einer Karman-Wirbelstraße



Reynolds-Kriterium für Wirbelbildung:

Starke Reibung → laminare Strömungen

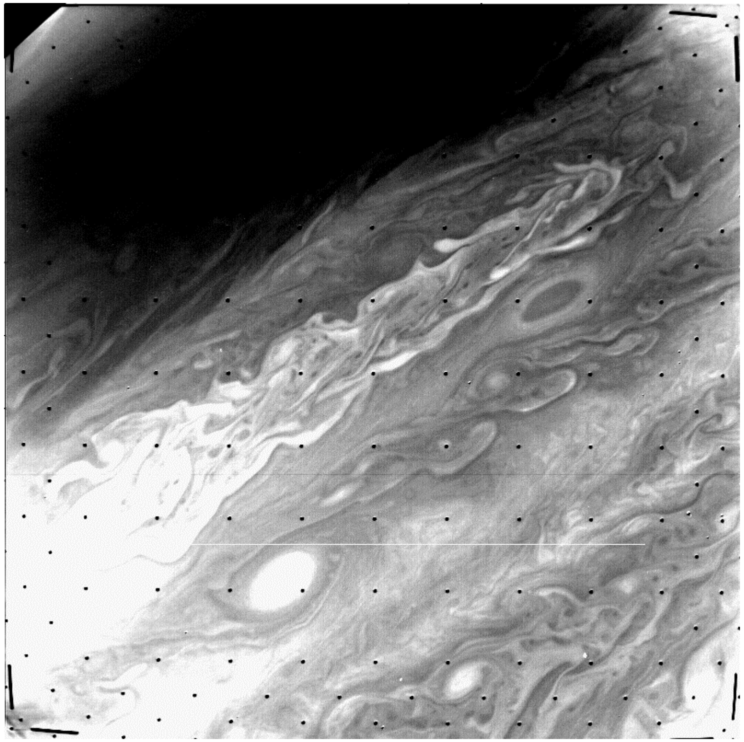
Keine Reibung → Wirbelbildung unmöglich

Schwache Reibung → Wirbelbildung

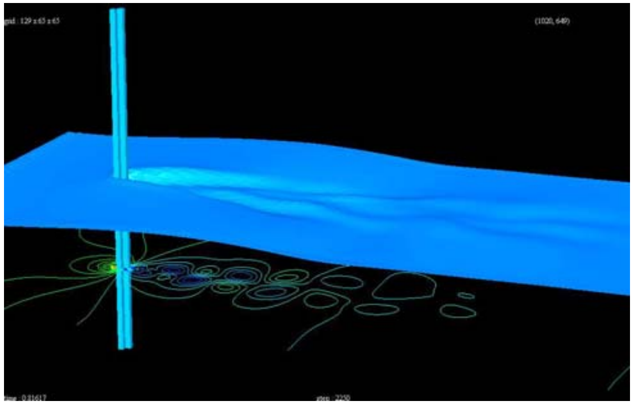
$$\rightarrow \ Re_{min} < Re < \infty$$

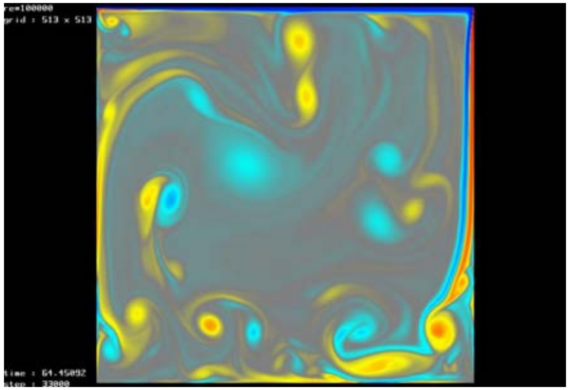
Bei Strömung in Rohren: $Re_{min} \cong 2000$

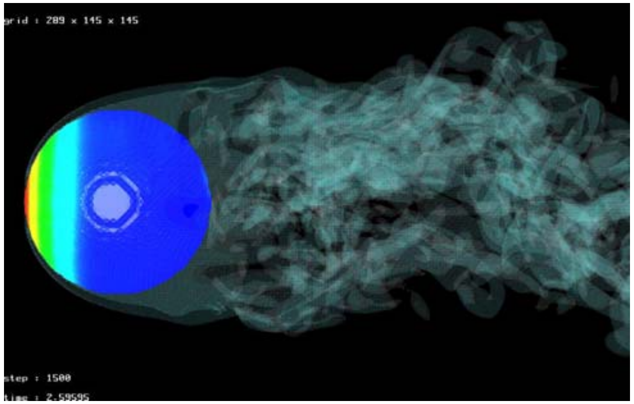
Wirbelstraße auf der Jupiteroberfläche



Weitere Beispiele zu Wirbelbildung durch numerische Lösung der Navier-Stokes Gleichung





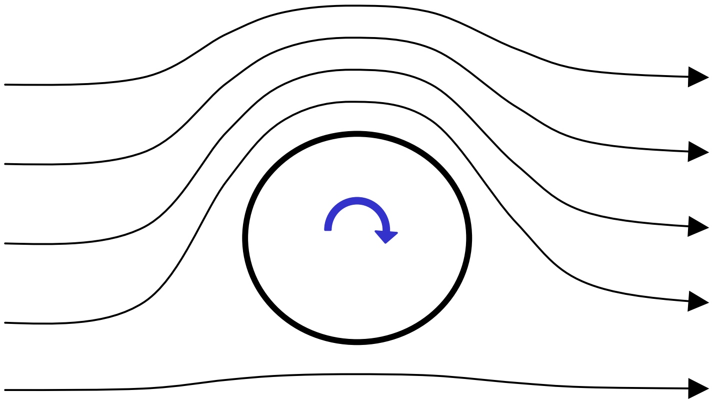


Magnus-Effekt:

Durch Reibung an der Oberfläche eines rotierenden Zylinders ist die Strömungsgeschwindigkeit an der einen Seite schneller als an der Anderen.

Geschwindigkeit oben: $v_o = v + \omega r$

Geschwindigkeit unten: $v_u = v - \omega r$



Nach Bernoulli ist also der statische Druck unten größer als oben $\rightarrow$ Auftrieb

$$\Delta p = \tfrac{1}{2}\rho(v_o^2 - v_u^2)$$

Bei einem Zylinder der Länge l ist die Auftriebskraft von der Größenordnung:

$$F \approx \tfrac{1}{2}\rho\, 2\omega r v\ r l$$

vektoriell:

$$\vec{F} \approx \rho l r^2 \vec{v} \times \vec{\omega}$$