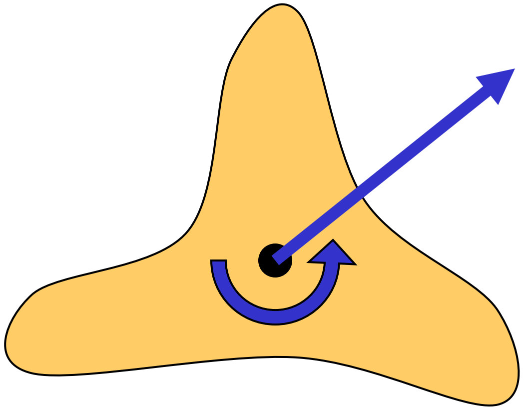
Dynamik starrer Körper

Bewegungen starrer Körper können in Translation und Rotation zerlegt werden.

Die Rotation stellt einen inneren Freiheitsgrad des Körpers dar, der bei Punktmassen nicht existiert.

Der Schwerpunkt ist ein ausgezeichneter Punkt des Körpers, für dessen Bewegung bestimmte Zusammenhänge der Punktmechanik gelten.



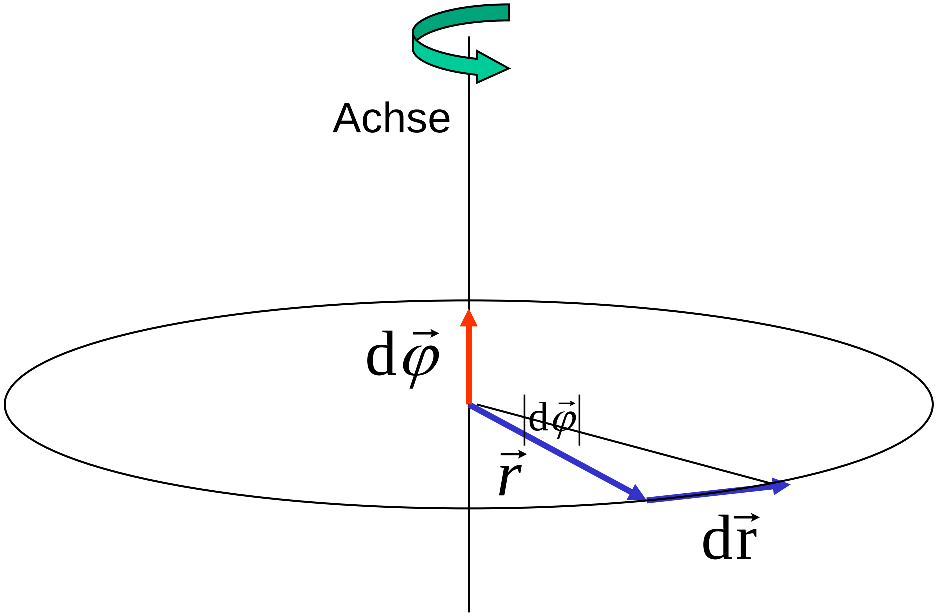
Versuch: Bewegung auf Luftkissentisch

Rotation um eine fest eingespannte Achse

Zur Beschreibung einer Rotation

definieren wir $\mathrm{d}\vec{\varphi}$, so dass:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{r}$$



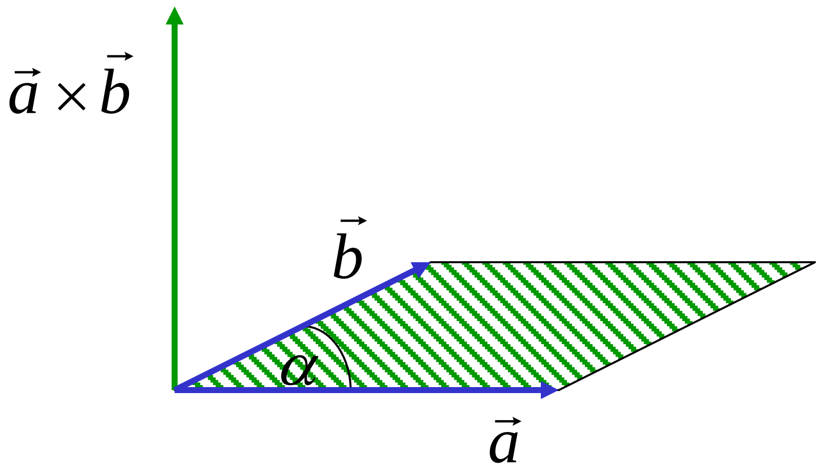
Die Richtung von $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ ist die Richtung der Achse mit rechtshändigem Drehsinn.

Der Betrag von $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ ist der Winkel um den gedreht wurde.

Einheit von $\vec{\varphi}$: rad (eigentlich keine Einheit)

Eine volle Umdrehung hat den Betrag 2π.

Kreuzprodukt (Vektorprodukt)



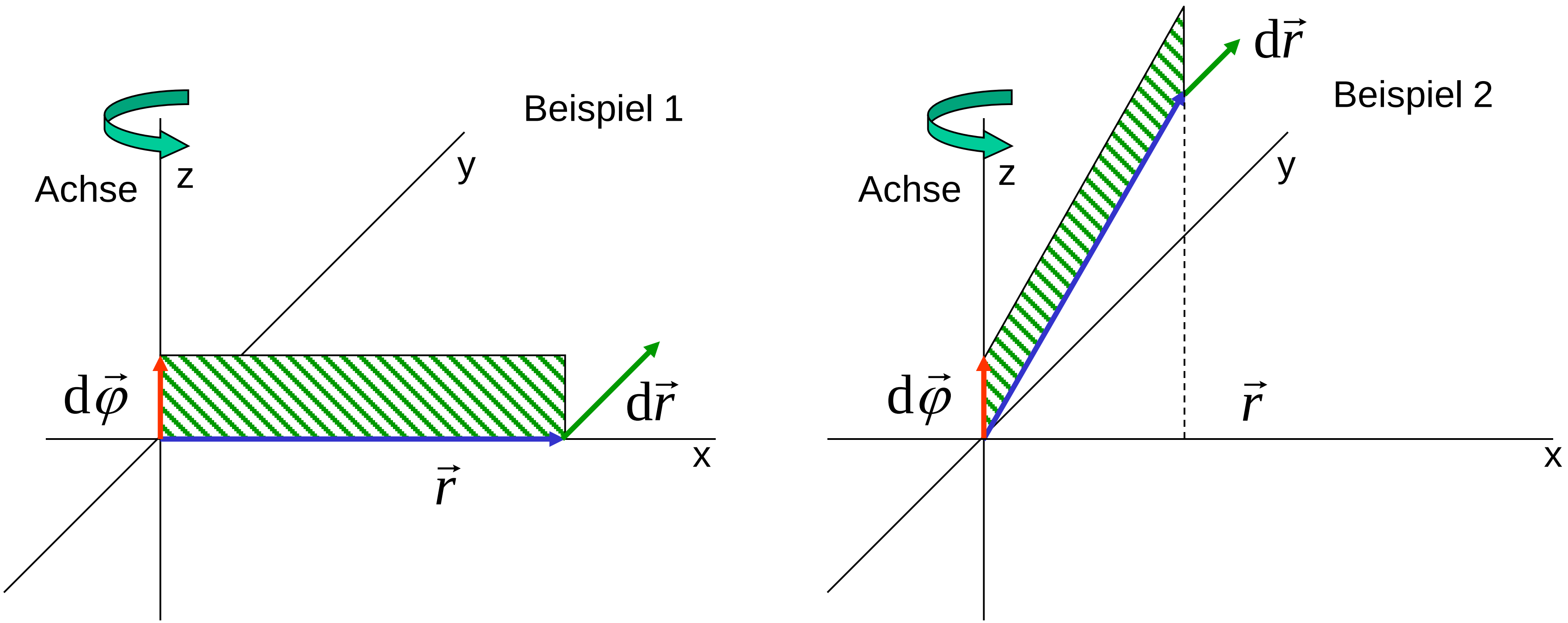
In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Betrag: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$

Kreuzprodukt bei Drehungen



Die schraffierte Ebene liegt in beiden Bildern in der xz-Ebene.
$d\vec{r}$ steht jeweils senkrecht auf der schraffierten Ebene und zeigt in y-Richtung.

Ebenso wie $d\vec{r}$ bei der linearen Verschiebung, erzeugt $d\vec{\varphi}$ bei einer Drehung um die Achse eine Verschiebung des Punktes $\vec{r}$ um $d\vec{r}$

Winkelgeschwindigkeit

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}}$$

$\vec{\omega}$ hat die Richtung der Drehachse ebenso wie $\mathrm{d}\vec{\varphi}$

Der Betrag gibt die „Drehgeschwindigkeit“ an.

Einheit: rad/s (oder besser 1/s)

Bei konstantem $\vec{\omega}$ gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T: Zeit für eine Umdrehung

Wenn die Achse durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, ist die momentane Geschwindigkeit eines Punktes:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Energie eines rotierenden Körpers

Die kinetische Energie des Körpers berechnet sich als Summe seiner einzelnen Massepunkte

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^{\,2}$$

Die Geschwindigkeit schreiben wir als Geschwindigkeit des Schwerpunktes plus Rotation um den Schwerpunkt ($\vec{r}_i$: Ort bzgl. Schwerpunkt)

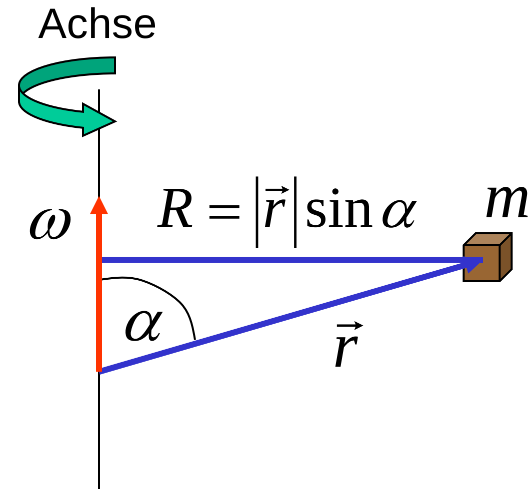
$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{v}_S + \vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_i m_i (\left|\vec{v}_S\right|^2 + 2\vec{v}_S\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}_i + \left|\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right|^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} M v_S^{\,2} + \tfrac{1}{2}\sum_i m_i (2\vec{v}_S\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}_i + \left|\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right|^2)$$

Für den letzten Term gilt:

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \left|\vec{\omega}\right|\left|\vec{r}\right| \sin a = \omega R$$



Es folgt:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} M v_S{}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_S \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_i + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R_i^2$$

Weil $\vec{r}$ auf den Schwerpunkt bezogen ist, gilt: $\sum_i m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}_i = 0$

damit folgt

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} M v_S{}^2 + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R_i^2$$

Die Bewegungsenergie des Körpers ist daher die Summe aus der kinetischen Energie einer entsprechenden Punktmasse im Schwerpunkt und der *Rotationsenergie.*

$$E_{Rot} = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R_i^2$$

Trägheitsmoment

Die Rotationsenergie kann geschrieben werden als

$$E_{Rot} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2$$

Wobei der Ausdruck in Klammern nur von der Geometrie des Körpers abhängt. Wir definieren daher das *Trägheitsmoment*

$$\boxed{J = \sum_i m_i R_i^{\,2}}$$

und schreiben die Rotationsenergie als

$$\boxed{E_{Rot} = \tfrac{1}{2} J\omega^2}$$

Die gesamte Bewegungsenergie des Körpers ist dann gegeben als

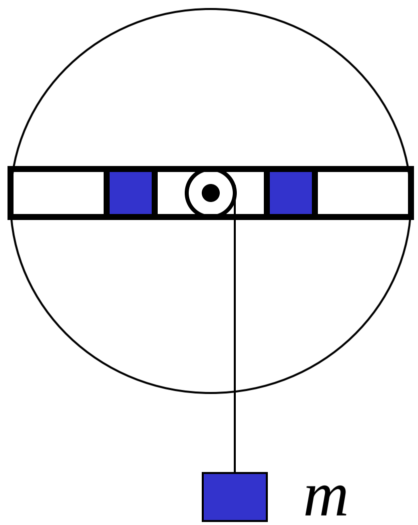
$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} M v_S^{\,2} + \tfrac{1}{2} J\omega^2$$

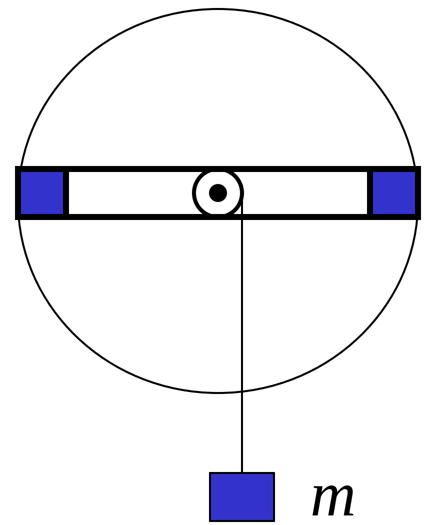
Massenelemente, die weiter von der Achse entfernt sind, tragen mehr Energie als achsnahe Massepunkte, da ihre Geschwindigkeit größer ist.

<u>Versuch:</u>

$$\tfrac{1}{2} J_1 \omega_1^{\,2} = mgh \qquad\qquad \tfrac{1}{2} J_2 \omega_2^{\,2} = mgh$$

$$J = \sum_i m_i R_i^{\,2}$$





Integrale Schreibweise:

beim Grenzübergang $dm \to 0$ wird aus der Summe ein Volumenintegral:

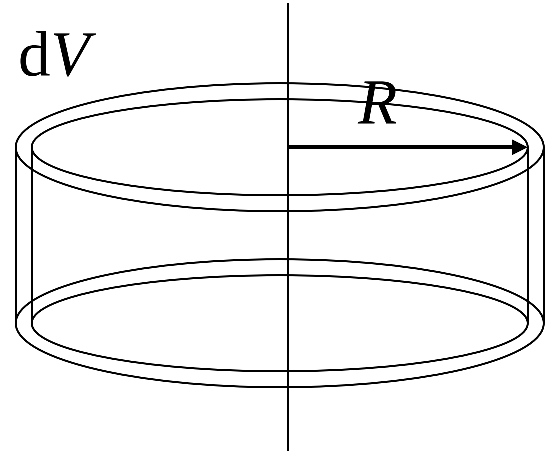
$$\boxed{J = \int_V \rho R^2 \mathrm{d}V}$$

R: Abstand von der Achse

Hierbei ist ρ die Dichte = Masse / Volumen

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Beispiel: Zylinder



$$J = \int_V \rho R^2 \underbrace{2\pi R h \,\mathrm{d}R}_{\mathrm{d}V}$$

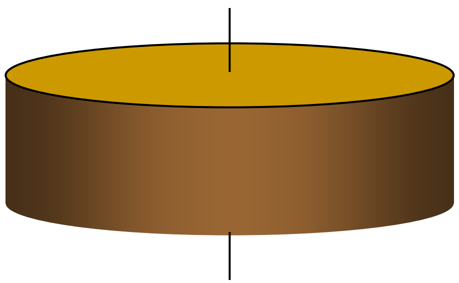
$$= 2\pi \rho h \int_0^{R_\mathrm{max}} R^3 \,\mathrm{d}R$$

$$= \tfrac{1}{2} \pi \rho h R_\mathrm{max}^4 = \tfrac{1}{2} M R_\mathrm{max}^2$$

Gesamtmasse: $M = \rho \pi R_\mathrm{max}^2 h$

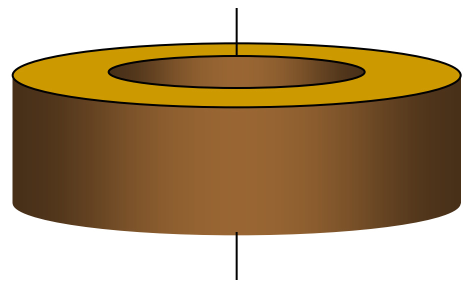
Beispiele für Trägheitsmomente:

Zylinder, Scheibe



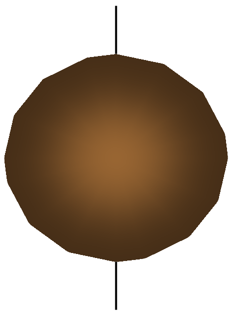
$$J = \tfrac{1}{2} M R^2$$

Hohlzylinder



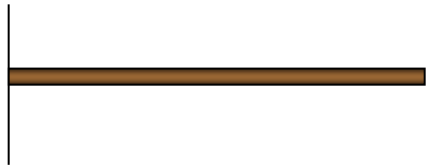
$$J = \tfrac{1}{2} M \left(R_a^{\,2} + R_i^{\,2}\right)$$

Kugel



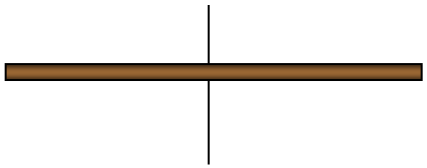
$$J = \tfrac{2}{5} M R^2$$

Stab - Achse am Ende



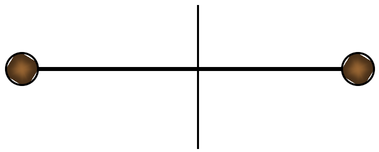
$$J = \tfrac{1}{3} M L^2$$

Stab - Achse in der Mitte



$$J = \tfrac{1}{12} M L^2$$

Hantel



$$J = \tfrac{1}{4} M L^2$$

M: Gesamtmasse, *R*: Radius, *L*: Länge

Steinerscher Satz:

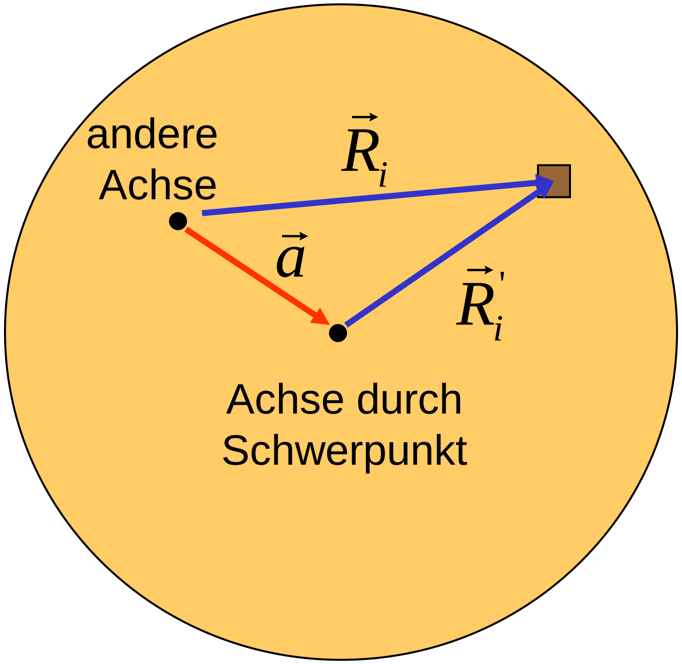
Ist das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt bekannt, ergibt sich für eine andere dazu parallele Achse:

$$J = \sum_i m_i R_i^2$$

$$= \sum_i m_i \left|\vec{a} + \vec{R}_i'\right|^2$$

$$= \sum_i m_i (a^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{R}_i' + R_i'^2)$$

$$= \sum_i m_i R_i'^2 + \underbrace{2\vec{a}\sum_i m_i \vec{R}_i'}_{=0} + a^2 \sum_i m_i$$



Das Trägheitsmoment bezüglich der neuen Achse:

$$\boxed{J = J_S + M a^2}$$

a : Abstand der Achse vom Schwerpunkt

Drehimpuls und Drehmoment:

Für eine Punktmasse multiplizieren Newtons Aktionsprinzip von links über das Kreuzprodukt mit dem Vektor $\vec{r}$

$$m\vec{r}\times\vec{a}=\vec{r}\times\vec{F}$$

Dann ist dies die zeitliche Ableitung der Gleichung

$$m\vec{r}\times\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p}$$

denn

$$m\dot{\vec{r}}\times\vec{v}+m\vec{r}\times\dot{\vec{v}}=\dot{\vec{r}}\times\vec{p}+\vec{r}\times\dot{\vec{p}}$$

$$\Rightarrow\quad \dot{\vec{r}}\times m\vec{v}+m\vec{r}\times\dot{\vec{v}}=\dot{\vec{r}}\times\vec{p}+\vec{r}\times\dot{\vec{p}}$$

$$\Rightarrow\quad m\vec{r}\times\dot{\vec{v}}=\vec{r}\times\dot{\vec{p}}$$

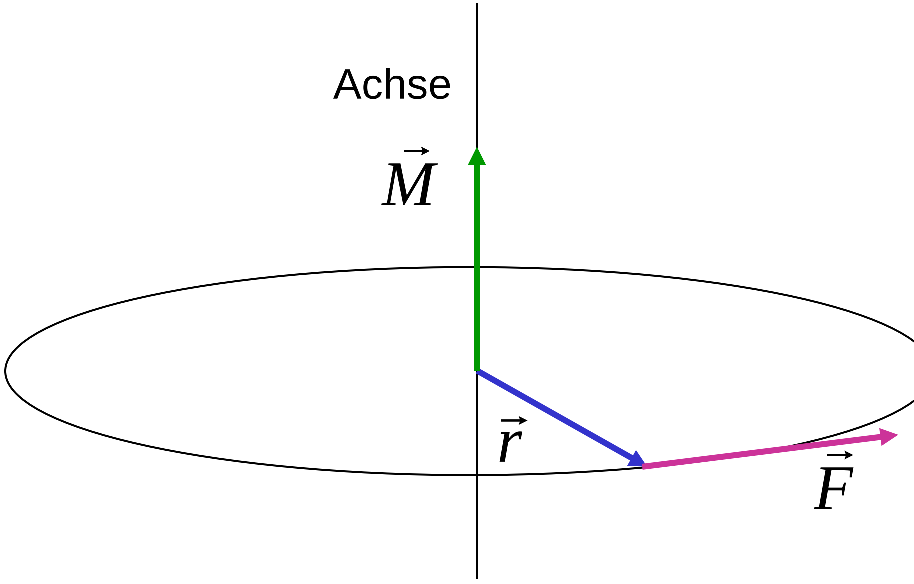
$$\Rightarrow\quad m\vec{r}\times\vec{a}=\vec{r}\times\vec{F}$$

Wir nennen den Term aus der zweiten Gleichung *Drehimpuls* und definieren:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

Den Term aus der ersten Gleichung nennen wir *Drehmoment* und definieren

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



Es folgt unmittelbar

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

Wir übertragen die Definitionen nun auf einen ausgedehnten starren Körper. Wenn die Bewegung der Massenelemente als gemeinsame Rotation um eine feste Achse $\vec{\omega}$ erfolgt . Daher gilt $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ und somit

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} - \left(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}\right) \cdot \vec{r}_i$$

Für einen Körper, der symmetrisch um die Rotationsachse ist, folgt

$$\boxed{\vec{L} = J\,\vec{\omega}}$$

Hier ohne Beweis. Für unsymmetrische Körper ergibt sich der Trägheitstensor (siehe hinten).

Das Drehmoment auf einen Körper ist gegeben durch

$$\boxed{\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i}$$

Die Kräfte müssen nicht notwendigerweise auf jedes Massenelement wirken Es können Volumen oder Oberflächenkräfte sein.

Aus

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

folgt

$$\vec{M} = J\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\,\vec{\omega}$$

Bei fester Achsrichtung in einem starren, rotationssymmetrischen Körper ist das Trägheitsmoment nicht zeitabhängig.

$$\vec{M} = J\,\dot{\vec{\omega}}$$

Die Gleichung ist analog zu Newtons Aktionsprinzip

Translation	Rotation
$\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$	$\vec{M} = J\,\dot{\vec{\omega}}$

Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls wird für jedes abgeschlossene System von Massepunkten erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Wenn es nur innere Kräfte zwischen den Teilchen *i* und *j* gibt, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

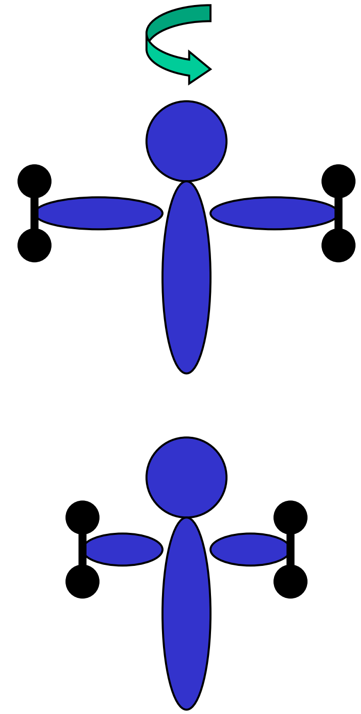
Wegen des Newtonschen Reaktionsprinzips heben sich die Terme paarweise auf und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Somit beleibt der Gesamtdrehimpuls des Systems erhalten.

Körper dessen Form sich ändert

Wenn J kleiner wird, muss ω größer werden.



$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = J\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\,\vec{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \quad J_v\,\omega_v = J_n\,\omega_n \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{J_v}{J_n}\,\omega_v$$

Energiebetrachtung:

$$E_v = \tfrac{1}{2}\,J_v\,\omega_v^{\,2} \quad , \quad E_n = \tfrac{1}{2}\,J_n\,\omega_n^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \tfrac{1}{2}\,J_n\,\omega_n^{\,2} = \tfrac{1}{2}\,J_n\left(\frac{J_v}{J_n}\,\omega_v\right)^2$$

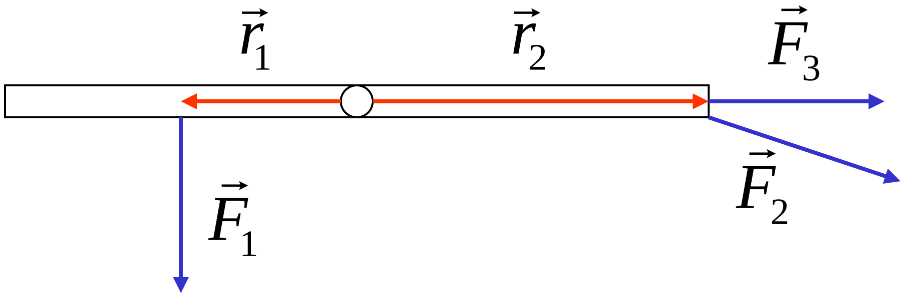
$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{J_v}{J_n}\,E_v$$

Verrichtete Arbeit bei der Armbewegung: $W = \int\limits_{R_1}^{R_2} F\,\mathrm{d}R = -\int\limits_{R_1}^{R_2} m\omega^2 R\,\mathrm{d}R$

Gleichgewicht:

Wenn die Summe aller Drehmomente in Achsrichtung gleich null ist, tritt keine Drehbeschleunigung auf. Körper bleibt im Gleichgewicht.

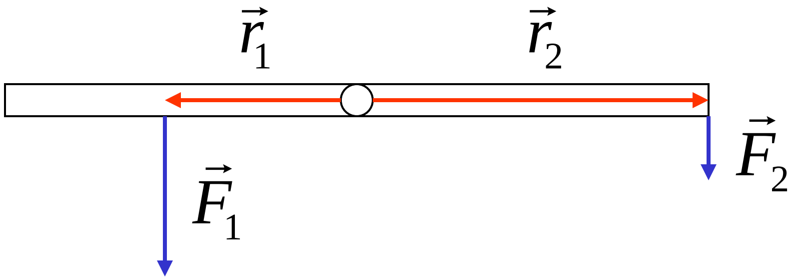
$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$



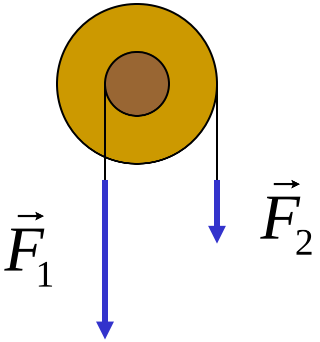
Hebel:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

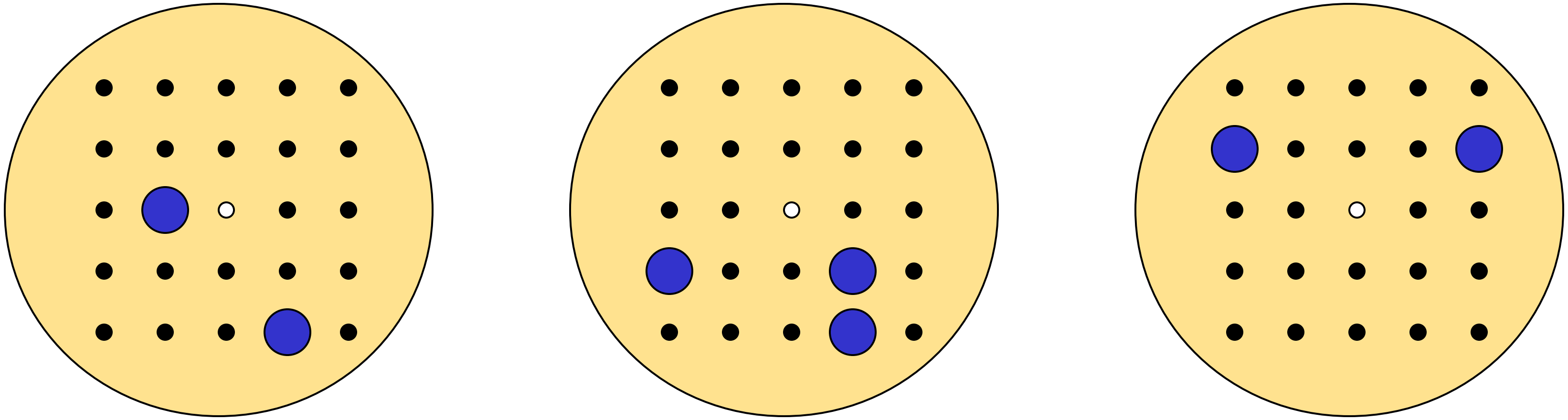
$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$



Übersetzung:



Versuch: Drehmomente durch Gewichtskraft



Gleichgewicht, wenn $M = 0$.

Gleichgewicht immer dann, wenn Schwerpunkt über/unter Achse liegt.

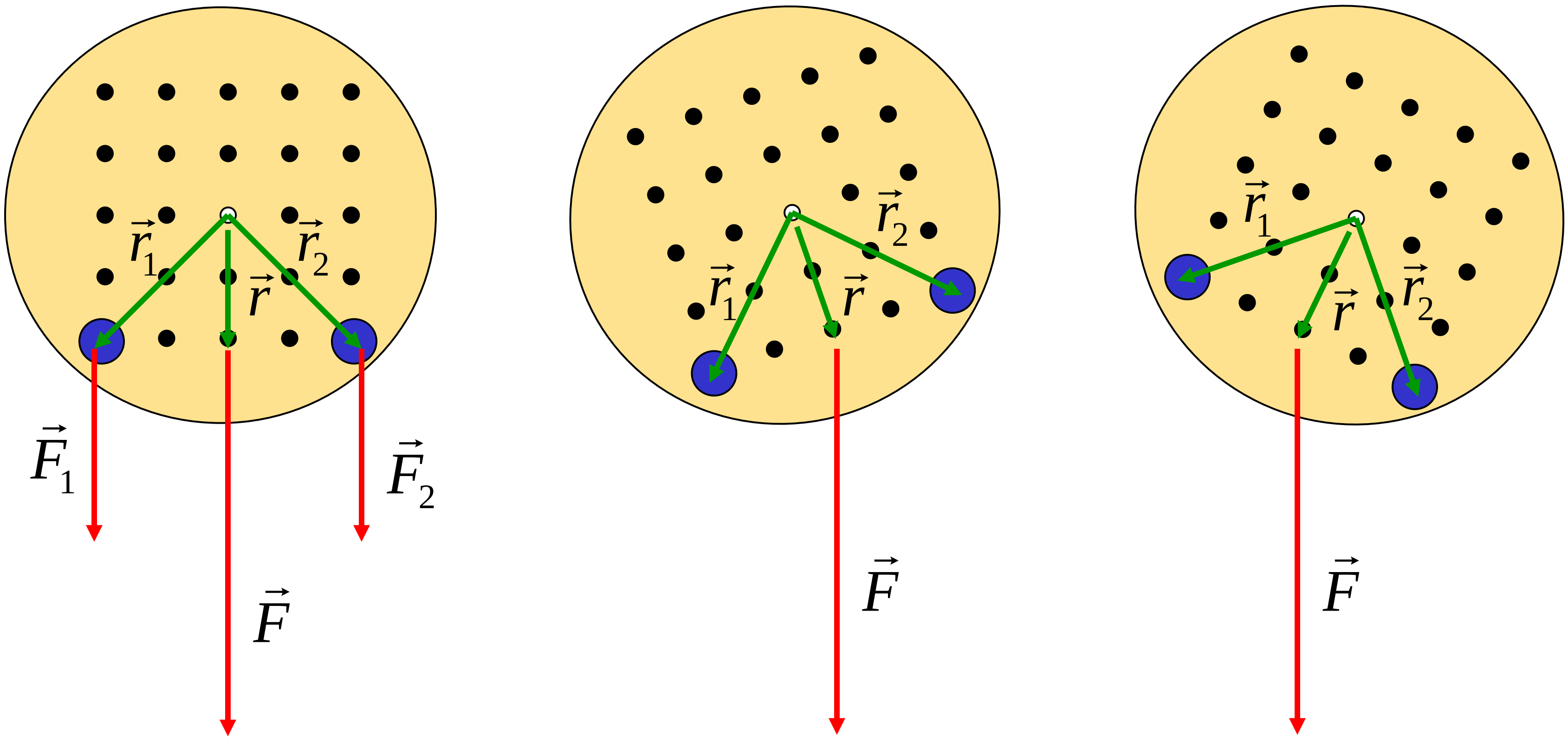
Stabiles Gleichgewicht: Schwerpunkt unter Achse

Bei Auslenkung Drehmoment in Richtung zur Gleichgewichtslage.

Labiles Gleichgewicht: Schwerpunkt über Achse

Bei Auslenkung Drehmoment weg von der Gleichgewichtslage.

Stabiles Gleichgewicht



$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$
$$= \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

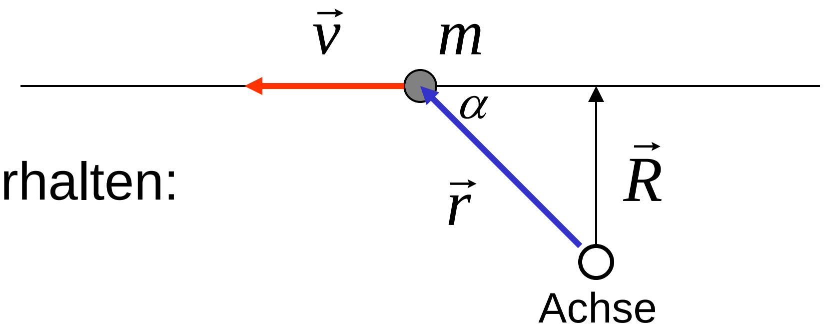
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \neq 0$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \neq 0$$

Drehimpulserhaltung und Impulserhaltung eines einzelnen Körpers

Impuls des Körpers wird erhalten:

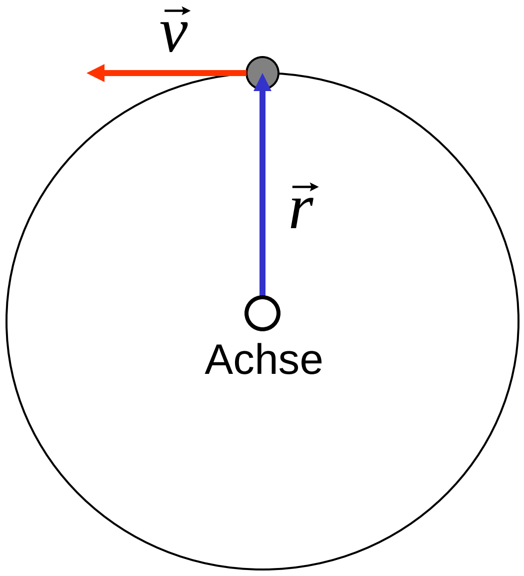
$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{const.}$$



Drehimpuls des Körpers wird erhalten:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const.}$$

$$L = m\, r\, v \sin\alpha = mRv$$



Drehimpuls des Körpers wird erhalten:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const.}$$

Impuls des Körpers wird nicht erhalten,

da eine radiale Zwangskraft wirkt.

Impuls und Drehimpuls

Der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems wird immer bezüglich jeder Achse erhalten.

Wirken auf einen einzelnen Körper nur Radialkräfte, dann ändern diese seien Drehimpuls nicht. Der Drehimpuls des einzelnen Körpers bleibt erhalten. (Radialkräfte nimmt die Achse auf.)

Beim Impulserhaltungssatz werden alle Kräfte auf einen Körper berücksichtigt. Der Impuls eines Körpers wird nur erhalten, wenn er kräftefrei ist.

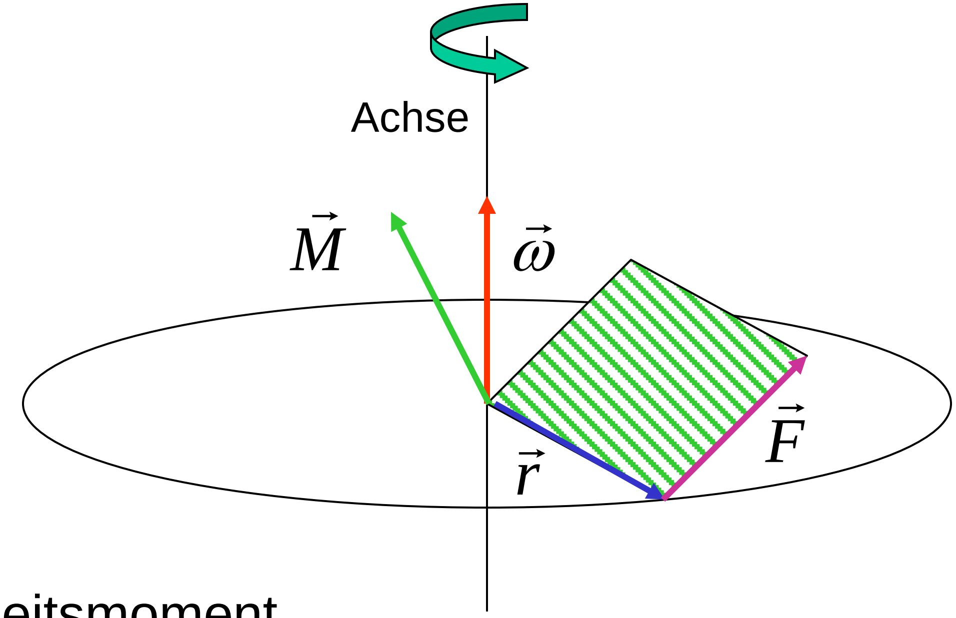
Der Drehimpuls eine einzelnen Körpers kann bezüglich einer bestimmten Achse erhalten sein, bezüglich einer anderen aber nicht (Radialkräfte sind jetzt keine Radialkräfte mehr).

Der Impuls hat eine andere Richtung als der Drehimpuls

Rotation um freie Achsen

Achse nicht gelagert oder in einem Punkt gelagert (Kreisel)

Das Drehmoment bewirkt eine
Änderung der Richtung von $\vec{\omega}$



Das Trägheitsmoment
eines Körpers hängt von
der Richtung der Achse ab.

Also ändert sich auch das Trägheitsmoment.

Die Richtungsabhängigkeit des Trägheitsmomentes wird mit einem Tensor (Matrix) beschrieben.

Trägheitstensor

Im allgemeinen Fall ist der Drehimpuls nicht parallel zur Drehachse.

Man kann zeigen:

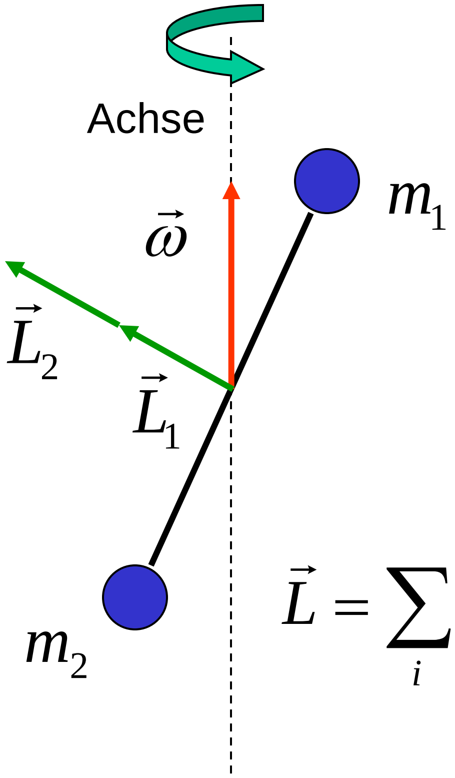
$$\boxed{\vec{L} = \tilde{J}\,\vec{\omega}}$$

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$

$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z$$

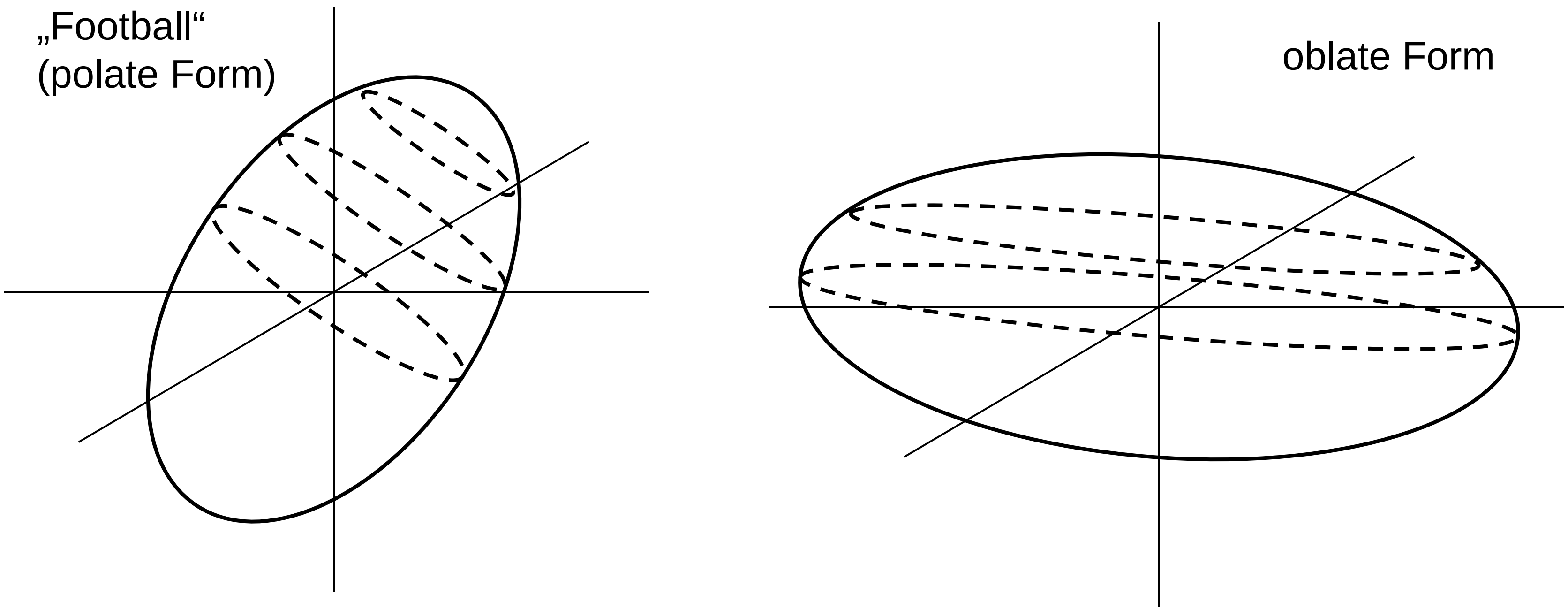
$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$$



$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Trägheitsellipsoid

Trägt man $1/\sqrt{J}$ für jede mögliche Achse durch den Schwerpunkt auf, erhält man einen Ellipsoid.

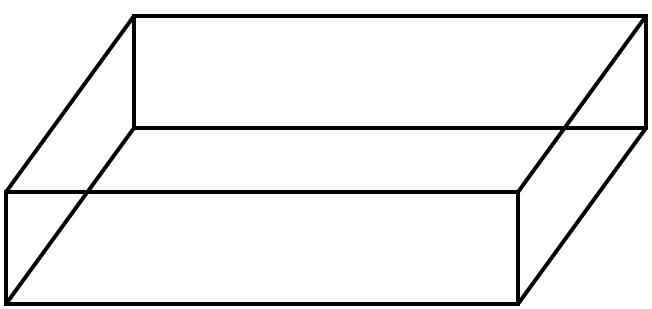


Der Ellipsoid hat drei Hauptachsen (die senkrecht zueinander stehen). Die Trägheitsmomente in diesen Richtungen nennt man „Hauptträgheitsmomente“.

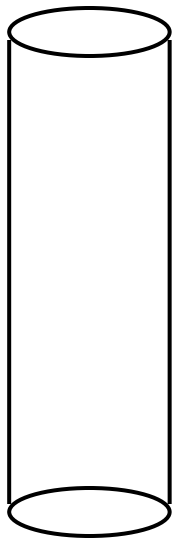
Mit einem kartesischen Koordinatensystem entlang der Hauptachsen ist der Trägheitstensor diagonal:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_c \end{bmatrix}$$

J_a, J_b und J_c sind die Hauptträgheitsmomente.



oblater Trägheitsellipsoid
(größtes J bzgl. senkrechter Achse)

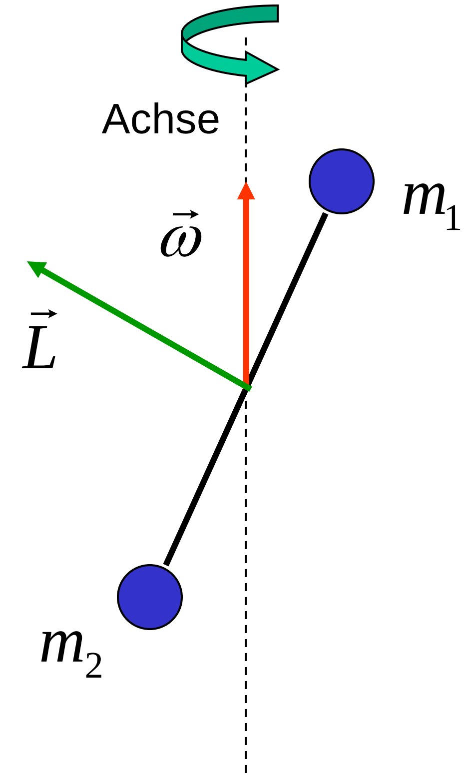


polater Trägheitsellipsoid
(kleinstes J bzgl. senkrechter Achse)

Freie Achsen

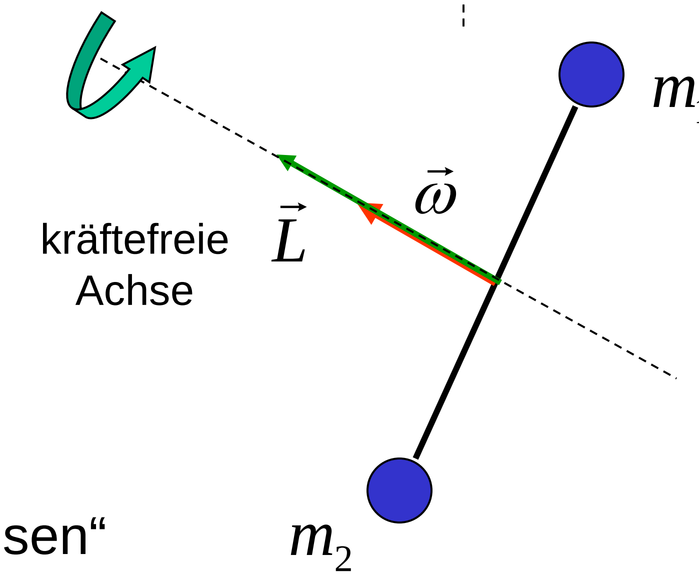
Die eingezeichnete Drehachse kann nur durch Kräfte auf die Achse beibehalten werden, denn

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \neq 0$$



Nach Freigabe der Achse erfolgt die Drehung um die Richtung von $\vec{L}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$



Kräfte wirken nur noch entlang der Stange (innere Radialkräfte).

Auf die Achse wirkt kein Drehmoment.

Solche Achsen bezeichnet man als „freie Achsen“

Freie Achsen

Achsen in Richtung der Hauptachsen des Trägheitsellipsoids sind freie Achsen.

Der Vektor $\vec{\omega}$ hat nur eine Komponente, z.B.

$$\vec{\omega} = (0,0,\omega_c)$$

damit folgt

$$\begin{bmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_c \end{bmatrix}$$

also

$$\vec{L} = (0,0,J_c\omega_c)$$

und damit $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$. Also ist die Achse kräftefrei.

Stabilität freier Achsen

Rotationen um die Achse mit dem größten und mit dem kleinsten Trägheitsmoment sind stabil.
Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist nicht stabil.
(kleine Störungen führen zum torkeln).

Versuch:

$I_a < I_b < I_c$