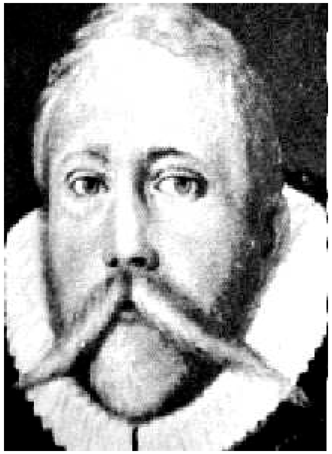
Gravitation

Massen zeihen sich gegenseitig an.

Aus astronomischen Beobachtungen der Planetenbewegungen kann das Gravitationsgesetz abgeleitet werden.

Von 1573-1601 sammelte Tycho Brahe mit bloßem Auge (ohne Fernrohr) sehr präzise Daten der Planetenbewegungen.



Tycho Brahe
1546 - 1601

Johannes Kepler hat mit Hilfe dieser Daten die Keplerschen Gesetze abgeleitet.

Kepler erkannte nicht das Gravitationsgesetz, das aus seinen Gesetzen abgeleitet werden kann.

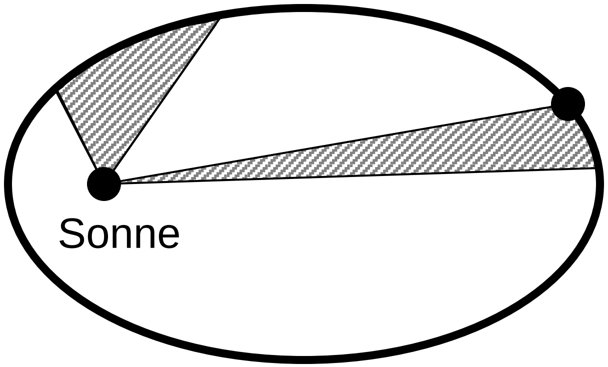
Johannes Kepler
1571-1630

Keplersche Gesetze:

Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Die Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Die Keplerschen Gesetze sind experimentelle Befunde zur Planetenbewegung in unserem Sonnensystem. Sie besitzen keine universelle Gültigkeit.
So kann die Umlaufzeit von Planeten in anderen Planetensystemen damit nicht vorhergesagt werden.

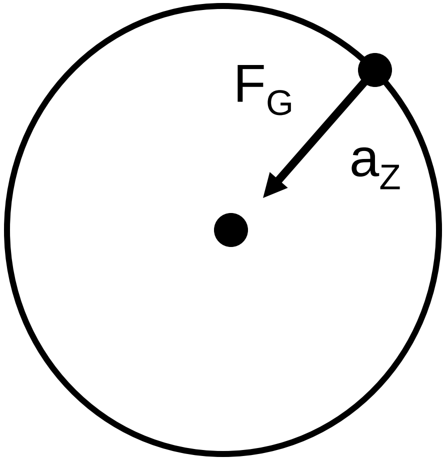
Newtons Gravitationsgesetz hat dagegen universellen Charakter.

Das Gravitationsgesetz kann nicht aus Newtons drei Axiomen hergeleitet werden. Es hat daher nochmals zusätzlichen axiomatischen Charakter, auch wenn es nicht Axiom genannt wird.

Zusammen mit einer Symmetrieüberlegung und der Einführung der Gravitationskonstanten lässt sich aus Keplers Gesetzen die Form des Gravitationsgesetz herleiten.

Annahme kreisförmiger Planetenbahnen:

Eine Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung.
Die auftretende Zentripetalbeschleunigung a_Z
kann durch Bildung der zweiten Ableitung
berechnet werden. (siehe nächstes Kapitel)



$$a_Z = \frac{v^2}{r}$$

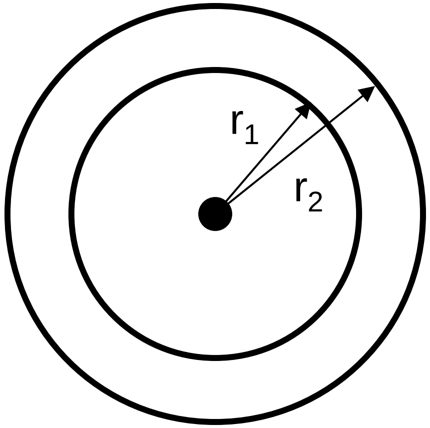
Geschwindigkeit des Planeten = Umfang / Zeit

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow{\text{einsetzen}} a_Z = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Die Zentripetalbeschleunigung wird verursacht durch die Gravitation

$$F_G = m\,a_Z$$

Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt:



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \xrightarrow{\text{umformen}} \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} = \text{const.}$$

mit

$$F_G = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} \xrightarrow{\text{erweitern}} \frac{F_G \cdot r^2}{m} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = \text{const.}$$

folgt

$$F_G = \frac{m \cdot \text{const.}}{\mathrm{r}^2}$$

Aufgrund des Reaktionsprinzips muss die Gravitationskraft auch proportional zur Sonnenmasse sein. Also folgt:

$$\boxed{F_G = \gamma \, \frac{m_1 \cdot m_2}{\mathrm{r}^2}}$$

γ = Gravitationskonstante

Der Legende nach fand Newton 1665 das Gravitationsgesetz aus folgender einfachen Abschätzung

Isaak Newton
1643 - 1727

Ein Apfel, der vom Baum fällt, wird durch die Gravitation mit ca. 10 m/s^2 beschleunigt.

Der Mond erfährt die Zentripetalbeschleunigung

$$a_Z = \frac{v^2}{r}$$

Er wird demnach mit

$$a_Z = 0.00273 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

beschleunigt.

Der Erdradius zum Radius der Mondbahn verhält sich wie $\approx 1 / 60$

Die Beschleunigungen 10 m/s^2 zu 0.00273 m/s^2 verhalten sich wie $\approx 1 / 3600$

Daraus zog Newton den kühnen Schluss, dass $F \propto 1 / r^2$

Messung der Gravitationskonstanten γ

An der Erdoberfläche wird eine Masse *m* mit der Kraft

$$F_G = \gamma \frac{m \cdot m_{\mathrm{Erde}}}{\mathrm{r}^2}$$

angezogen. Der Erdradius ist direkt messbar, nicht aber die Erdmasse.
Aus einer Messung dieser Kraft kann nur das Produkt $\gamma \cdot m_{\mathrm{Erde}}$ bestimmt werden.
Die Konstante ist auch nicht aus Planetenbewegungen herleitbar, da die Massen der Sonne und der Planeten unbekannt sind.

Die Gravitationskonstante ist nur messbar, wenn beide beteiligten Massen separat ausgemessen werden können.

Die Gravitationskonstante ist die am ungenausten bekannte Naturkonstante.

$$\gamma = (6.673 \pm 0.01)\ 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 / \mathrm{kg\ s}^2$$

Versuch: Gravitationsdrehwaage nach Cavendish-Eötvös (1798)

Kraft zwischen den Massen m_1 und m_2

$$F_G = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{\mathrm{r}^2}$$

Beschleunigung:

$$m_1 \cdot a = F_G = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{\mathrm{r}^2}$$

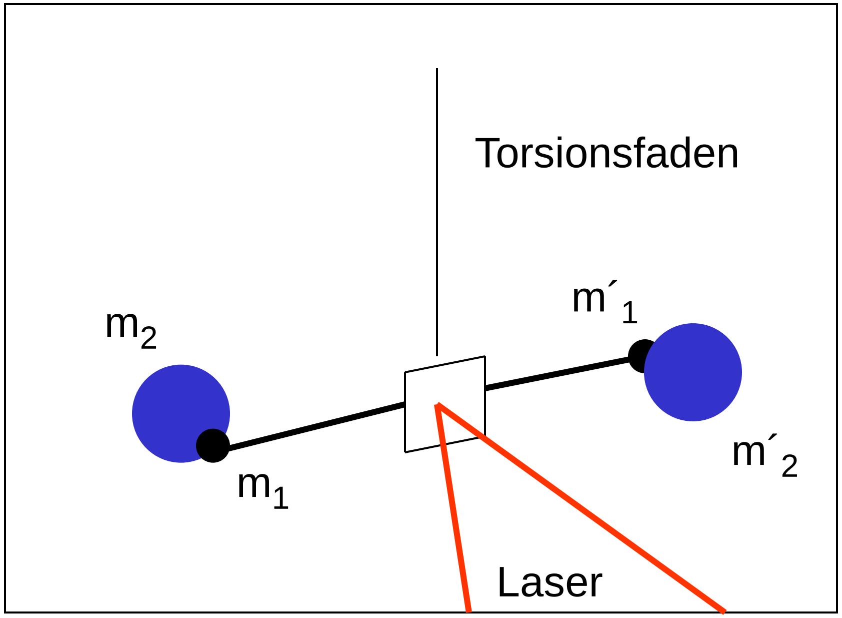
Wegen der Anfangsstellung von

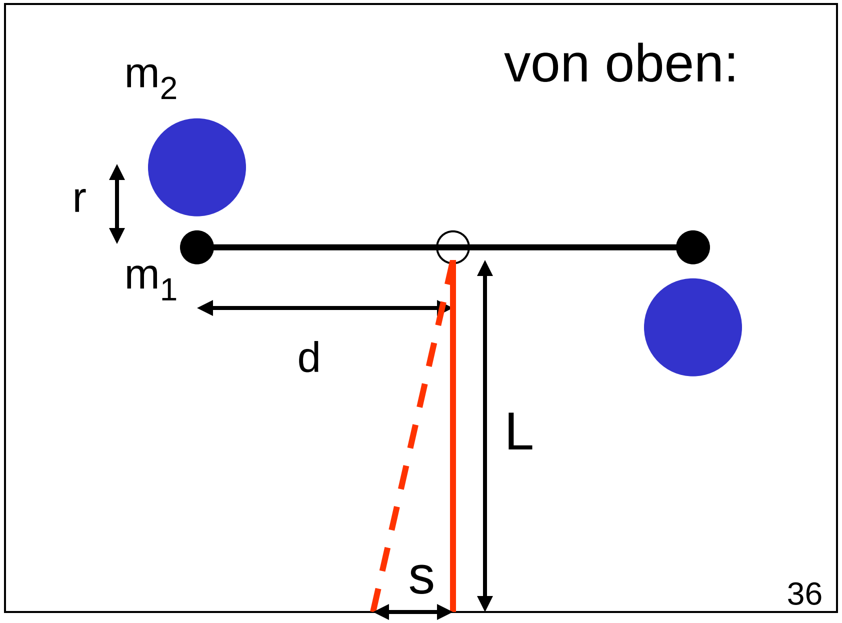
m_2 gegenüber m_1 :

$$a = 2 \cdot \gamma \frac{m_2}{\mathrm{r}^2}$$

Ablesen mit Laserzeiger (doppelter Winkel):

$$\frac{\Delta r}{d} = \frac{1}{2} \frac{s}{L}$$





Es handelt sich um eine beschleunigte Bewegung:

$$r(t) = r_0 + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2$$

Nach dem Zeitintervall T hat sich die Masse m_1 um die Strecke Δr bewegt.

$$\Delta r = \frac{a}{2} \cdot T^2$$

Zum Auswerten des Experimentes wird die Beschleunigung bestimmt:

$$a = \frac{2\Delta r}{T^2}$$

Δr berechnet sich aus der Auslenkung des Laserzeigers

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{d}{L} s$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{d\ s}{T^2 L}$$

durch Gleichsetzen von

$$a = \frac{d\ s}{T^2 L}$$

mit

$$a = 2 \cdot \gamma\ \frac{m_2}{\mathrm{r}^2}$$

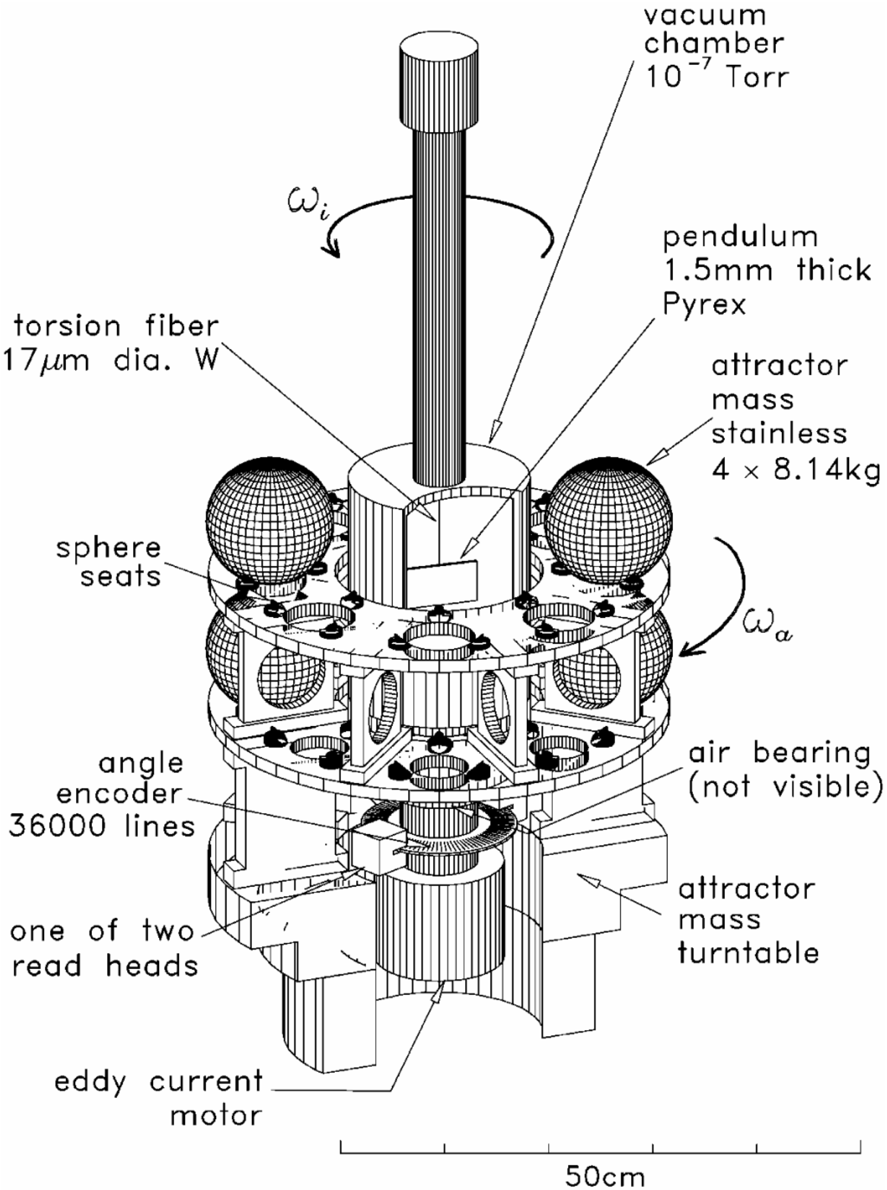
folgt

$$\gamma = \frac{d\ s\ r^2}{2\ m_2\ T^2 L}$$

Experimentelle Ergebnisse:

m_2 =	1.5 kg	± 1%
r =	0.048 m	± 10%
d =	0.05 m	± 5%
L =	30.8 m	± 1%
s =		
T =		
γ =		

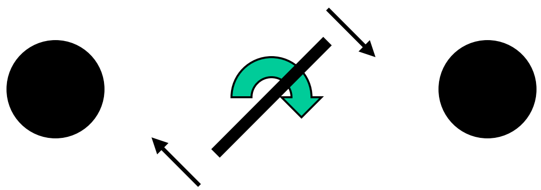
<u>Aktuelles Experiment:</u> Messwert γ = $(6.6742 \pm 0.0001)\ 10^{-11}\ m^3 / kg\ s$



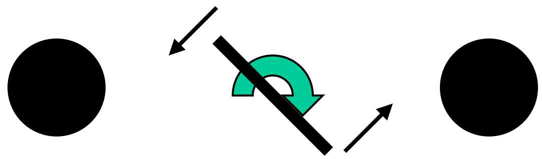
J.H.Gundlach et. al, Phys. Rev. Lett. 85, 2869 (2000)

Verspiegelte Glasplatte dreht sich zwischen zwei Massen (8,14 kg ± 3mg)
Aufhängung des Torsionsfadens wird mitgedreht.
Genaue Position der Glasplatte als Funktion von der Zeit wird gemessen.
Daraus wird Beschleunigung berechnet.

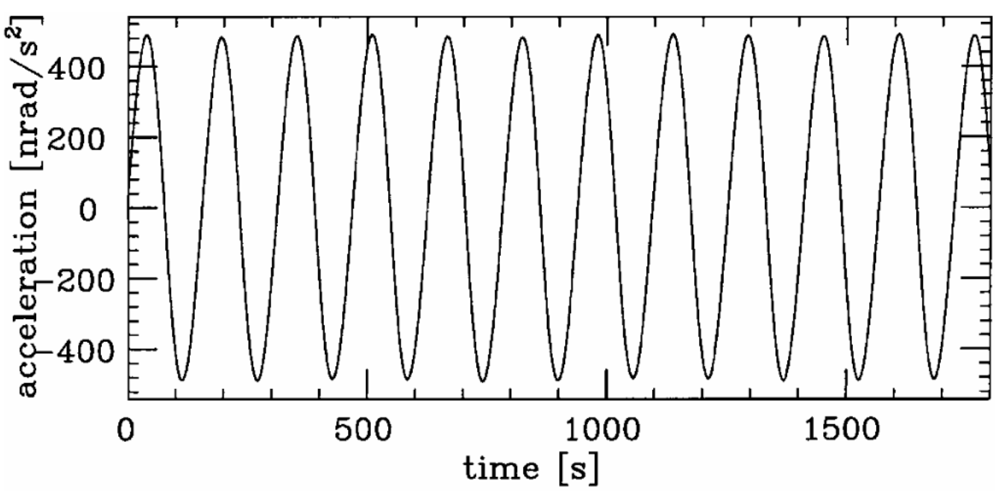
Beschleunigt

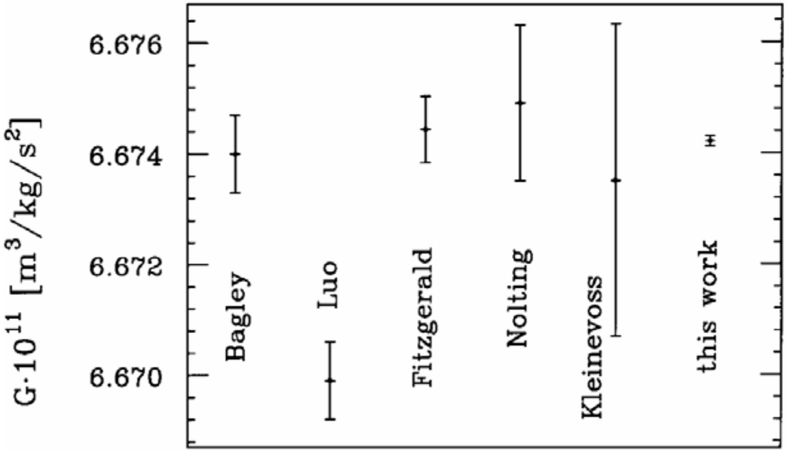


Gebremst



Größte Ungenauigkeit ist die Präzision der Massenanordnung (± 1µm)





Messungen seit 1995

An der Erdoberfläche, d.h. im Alltagsleben, wird jede Masse im Wesentlichen durch die Erde angezogen. $\rightarrow$ Erdanziehungskraft

<u>Messung der Erdanziehungskraft:</u>

Kraftmessung über Messung der Beschleunigung einer Probemasse

Fallversuch:

$$F_G = \gamma \frac{m \cdot m_{\mathrm{Erde}}}{\mathrm{r}^2} = m \cdot a$$

m kürzt sich heraus, d.h. alle Probemassen fallen gleich schnell.

Ergibt die s.g. Fallbeschleunigung:

$$a = \gamma \frac{m_{\mathrm{Erde}}}{\mathrm{r}^2}$$

Das Kürzen von *m* setzt etwas Grundlegendes voraus:

träge Masse = schwere Masse

Experimentelle Bestätigung mit rel. Genauigkeit $< 10^{-11}$

Messung der Fallbeschleunigung:

z.B. Messung der Fallzeit: (gleichmäßig beschleunigte Bewegung)

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2$$

daraus Bestimmung von *a*. Erdbeschleunigung wird üblicherweise mit *g* abgekürzt. Mittlerer Wert: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Demonstrationsversuch z.B. mit Fadenpendel $\rightarrow$ wird später gezeigt

Präzisionsmessung mit Gravimeter:

Absolutbestimmung von *g* mit Fallversuch.

Ortsmessung *x(t)* wird mit Laserinterferometer und Atomuhr durchgeführt.

Auszählen der Interferenzringe als Funktion von der Zeit während des Fallens.

Zurückführung auf Ort- und Zeitmessung ergibt hohe Genauigkeit.

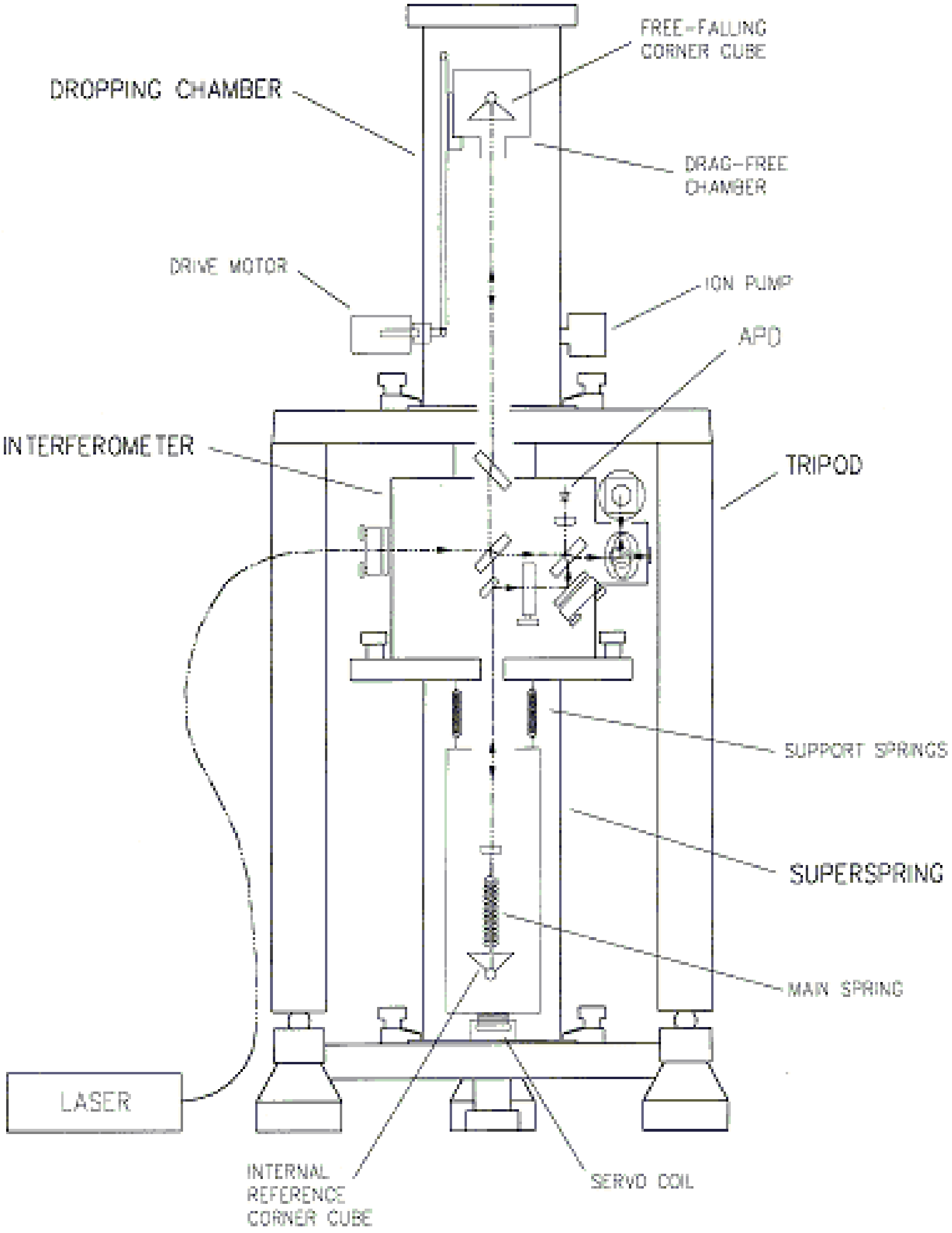
Relativer Fehler: 10^{-9}

Absolutes Gravimeter:

Fallversuch im Hochvakuum

Jod-stabilisierter HeNe-Laser

Rubidium-Atomuhr



Beispiele für Variation der Fallbeschleunigung

Hamburg Flughafen: 9.8139443 m/s^2

Hannover Flughafen: 9.8128745 m/s^2

München Flughafen: 9.8072914 m/s^2

Rom Flughafen: 9.8034255 m/s^2

Fallbeschleunigung wird beeinflusst durch: Erdabplattung, Erddrehung, Ebbe und Flut, geologische Gegebenheiten

Anwendung: z.B. Suche nach Öl, Erforschung von Magmafluss in Vulkanen

Berechnung der Erdmasse aus der Fallbeschleunigung

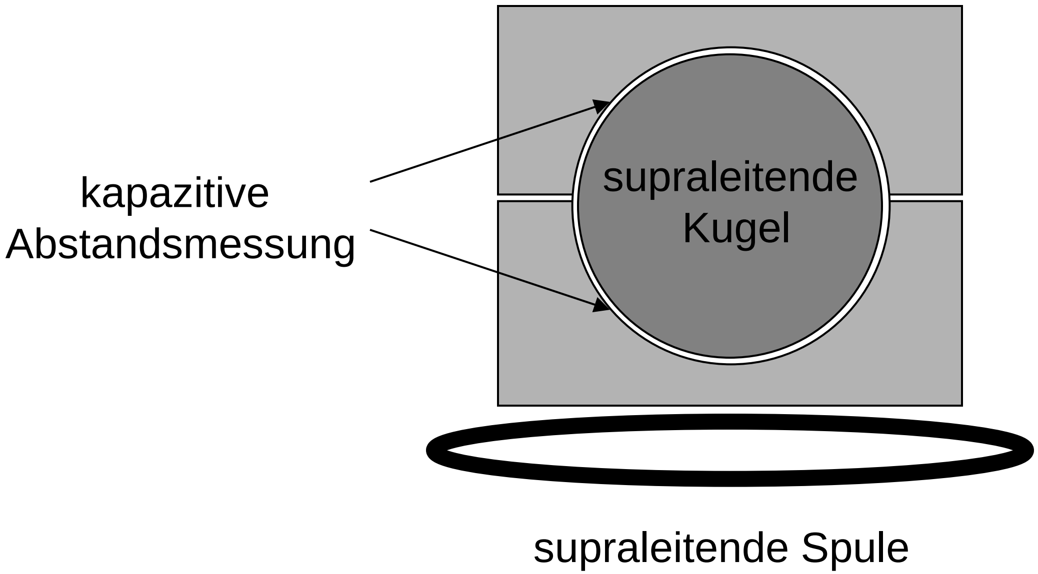
Bei kugelsymmetrischen Massen darf mit Punktmasse im Mittelpunkt gerechnet werden. (Mathematischer Beweis wird hier nicht gezeigt.)

Erdradius: 6378 km (Äquator)

$$a = \gamma \frac{m_{\mathrm{Erde}}}{\mathrm{r}^2} \longrightarrow m_{\mathrm{Erde}} = \frac{a\, r^2}{\gamma}$$

$\rightarrow$ Erdmasse: 5.98 10^{24} kg

Relative Gravimeter



Supraleitende Kugel schwebt über supraleitender Spule.

Abstoßende Kraft im inhomogenen Magnetfeld (Meißner-Ochsenfeld-Effekt).

Elektrische Ströme sehr konstant (ändern sich unmerklich in 100000 Jahren).

Abstoßende Kraft ist viel konstanter als Erdanziehungskraft.

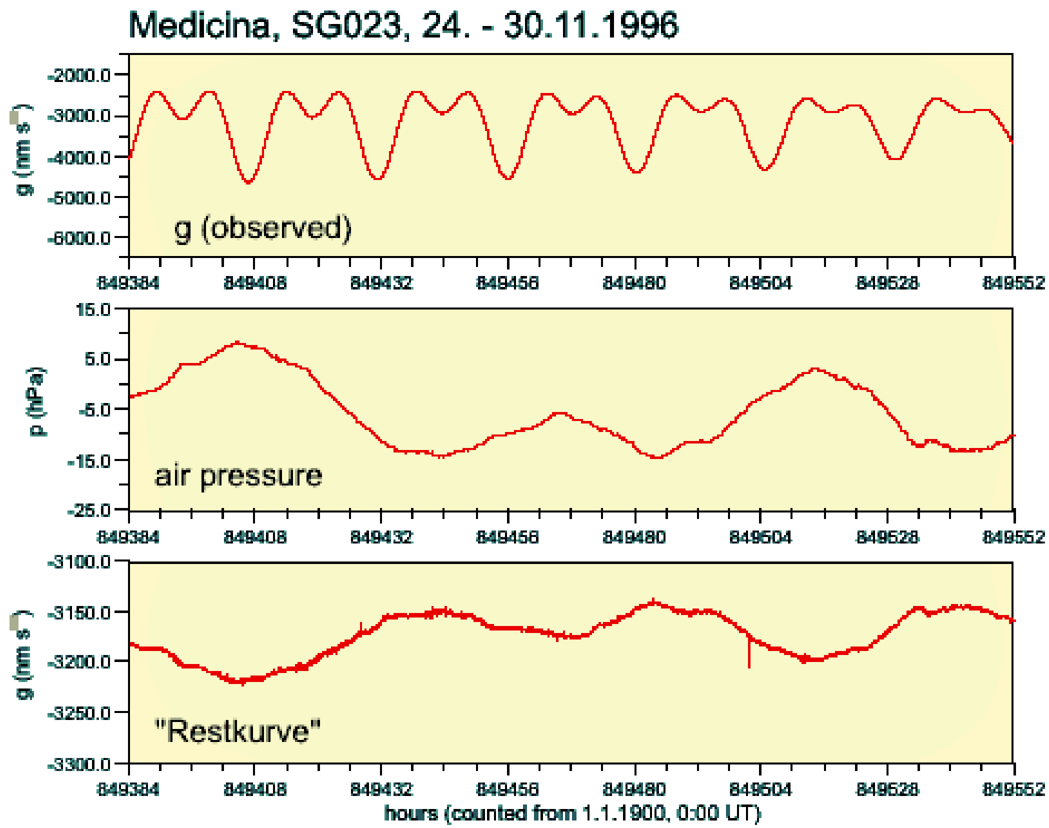
Kraftänderungen ändern die Position der schwebenden Kugel um wenige nm.

Relative Empfindlichkeit für g: 10^{-11}

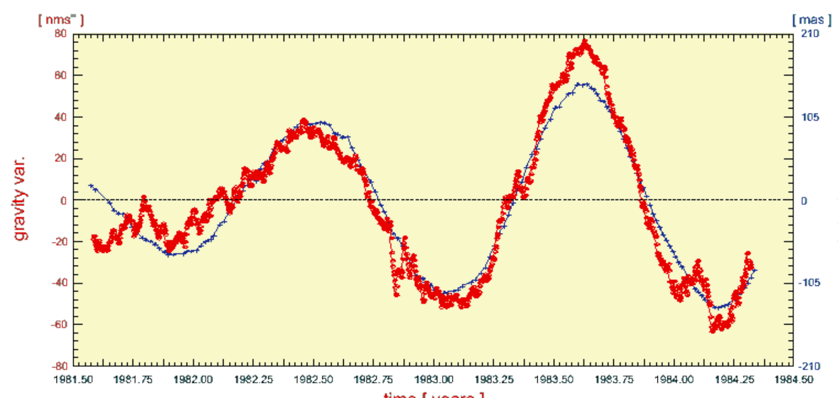
Schwankungen von *g*

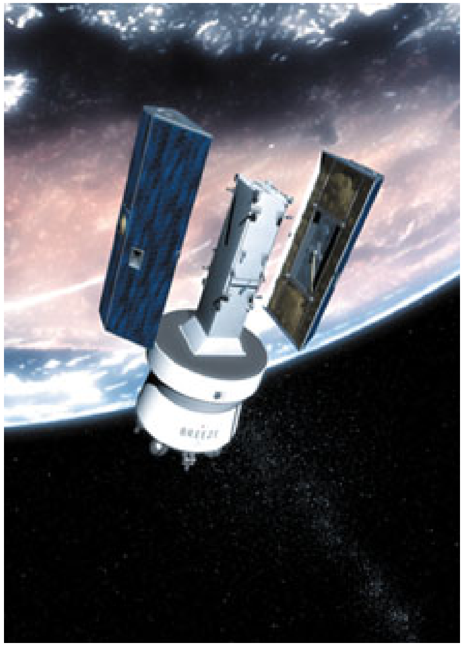
Gezeiten (Ebbe und Flut)
Gravitation von Mond und Sonne

Gravitation der Atmosphäre



Schwankungen der
Erdrotationsachse über 3 Jahre
(Variation der Zentrifugalkraft)

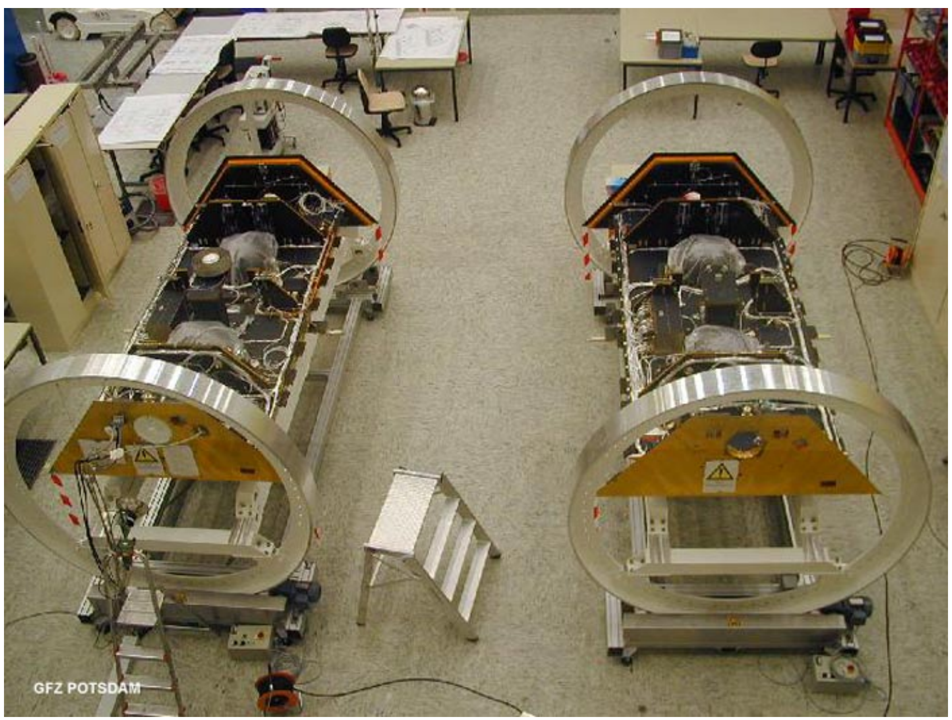


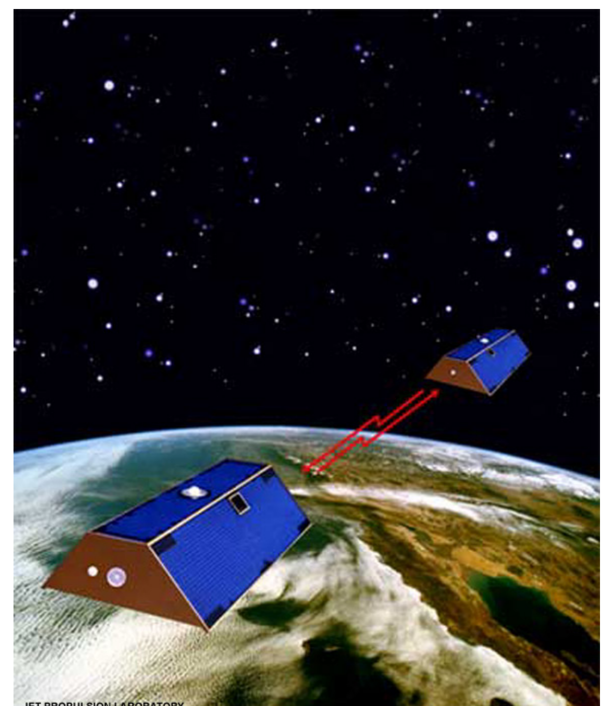


Messung der Erdbeschleunigung mit Satelliten

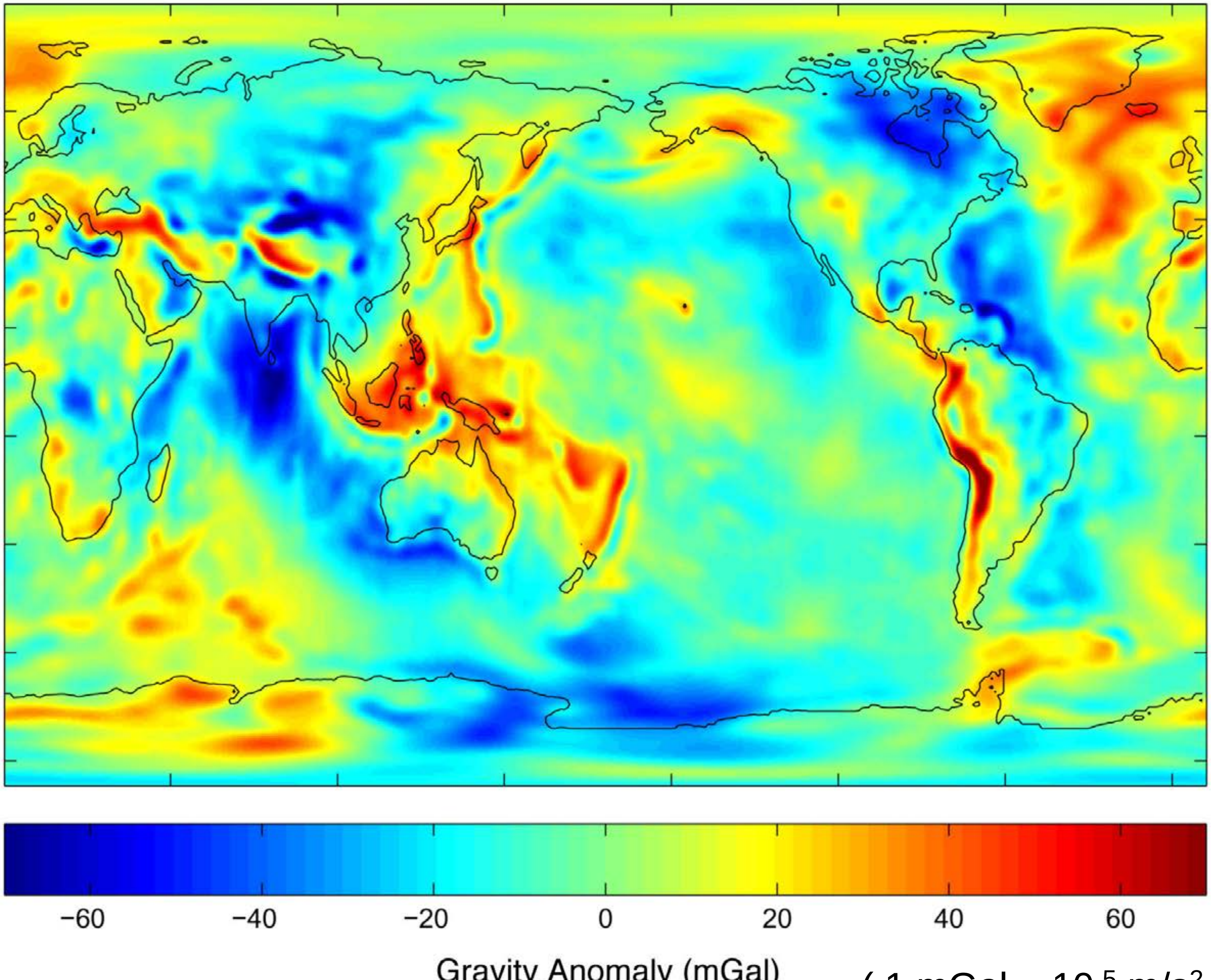
Orts- und Zeitabhängigkeit der Erdbeschleunigung wird mit zwei Satelliten im Abstand von 220 Km gemessen.

Abstand der Satelliten wird auf μm genau vermessen und aus diesen Bahnparametern die Erdbeschleunigung bestimmt.





Abweichung der Erdbeschleunigung *g* von ihrem mittleren Wert



(1 mGal = 10^{-5} m/s^2)