Schwingungen

Schwingungen haben eine zentrale Bedeutung in der Physik.

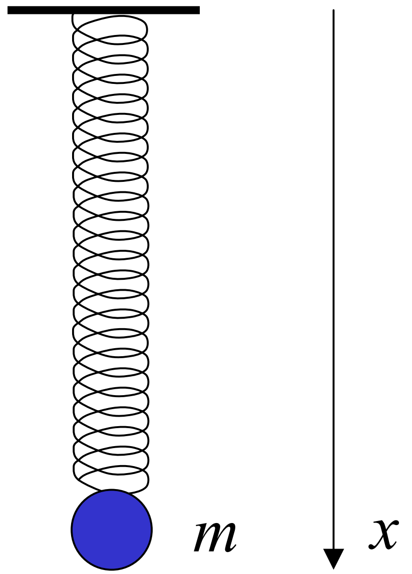
Der Formalismus wird in sehr vielen Bereichen der Physik verwendet.

<u>Federpendel</u> (ungedämpft):

Die elastische Kraft einer Feder ist proportional zur Auslenkung: Hooksches Gesetz (vgl. Abschn. Elastizität)

$$F = -Dx$$

D: Federkonstante



Eindimensional

Kräfte, die an der Masse angreifen:

1. Ruhelage:

$$F_G + F_F = mg - Dx_0 = 0$$

Die Auslenkung x_0 kompensiert die Gewichtskraft.

2. Auslenkung aus Ruhelage:

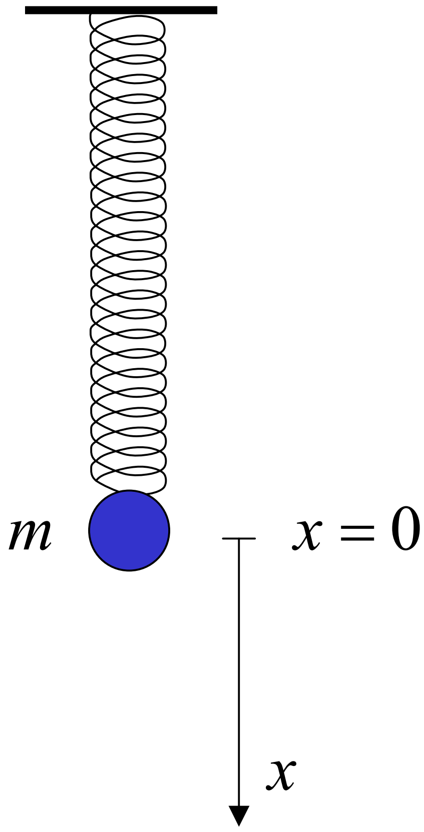
Man wählt den Nullpunkt von *x* bei der Ruhelage und betrachtet *m* in der Ruhelage als kräftefrei.

Verbleibende Auslenkungen beschleunigen *m*.

$$ma = -Dx$$

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t)$$ Differentialgleichung



Versuch eine Lösung zu finden:

Schwingung ist periodisch, also probieren wir mal:

$$x(t) = \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\sin(\omega t)$$

Einsetzen:

$$-\omega^2 \sin(\omega t) = -\frac{D}{m}\sin(\omega t)$$

Ergibt Bestimmungsgleichung für den Parameter ω.

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

Die Funktion

$$x(t) = \sin(\sqrt{\tfrac{D}{m}}\, t)$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung („harmonische Schwingung").

Die Frequenz der Schwingung ist durch Federkonstante und Masse festgelegt.

<u>Schwingungsdauer:</u>

Eine volle Schwingung ist durchlaufen wenn $\omega T = 2\pi$ also

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Suche nach weiteren Lösungen:

Schwingungen mit anderer Amplitude und Phase sind auch möglich.

Amplitude und Phase werden erst durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Alle Funktionen der Form

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

sind auch Lösung, denn

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \qquad \ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

Einsetzen liefert ebenso

$$-A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\frac{D}{m}A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$x(t) = A\sin(\sqrt{\tfrac{D}{m}}\, t + \varphi)$$

A: Amplitude, φ: Phase

Berechnung der Amplitude und Phase aus den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0 = A\sin\varphi$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = A\sqrt{\tfrac{D}{m}}\cos\varphi$$

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ist (eindeutig) lösbar:

Dividieren liefert:

$$\frac{x_0}{v_0} = \sqrt{\frac{m}{D}}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{m}{D}}\tan\varphi$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{D}{m}}\right)$$ Phase der Schwingung

Einsetzen liefert A:

$$A = \frac{x_0}{\sin\varphi}$$ Amplitude der Schwingung

Drehpendel (ungedämpft):

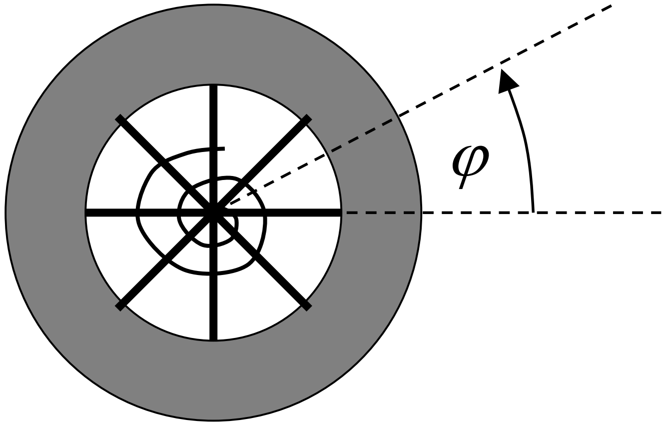
Feder erzeugt ein Drehmoment

$$\vec{M} = -D\vec{\varphi}$$

proportional zum Drehwinkel

Aktionsprinzip für Drehungen liefert:

$$J\ddot{\vec{\varphi}} = \vec{M}$$



Daraus ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\ddot{\vec{\varphi}} = -\frac{D}{J}\vec{\varphi}$$

Man findet ganz analog die allgemeine Lösung:

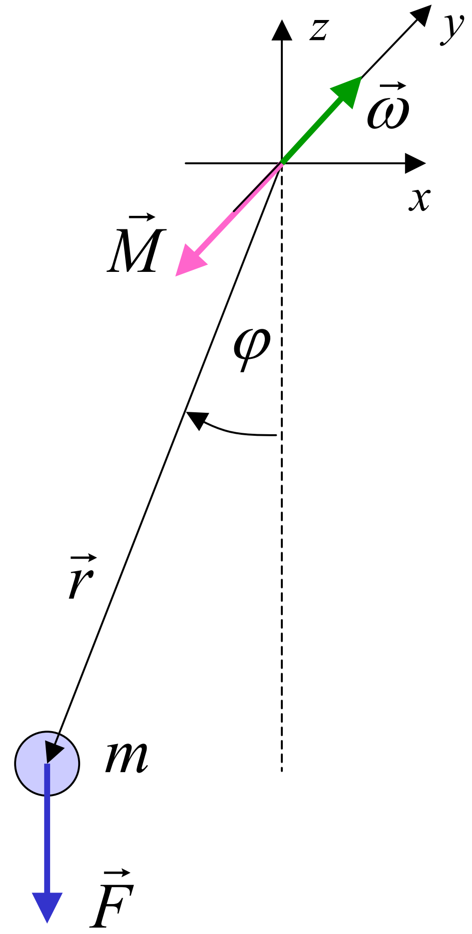
$$\varphi(t) = A\sin(\sqrt{\tfrac{D}{J}}\, t + \alpha)$$

Fadenpendel (ungedämpft, starrer „Faden“):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} = (-l \sin\varphi, 0, -l\cos\varphi) \qquad l = |\vec{r}|$$

$$\vec{F} = (0, 0, -mg)$$



$$\vec{r} \times \vec{F} = (r_y F_z - r_z F_y,\ r_z F_x - r_x F_z,\ r_x F_y - r_y F_x)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = (0, -mgl \sin\varphi, 0)$$

Aktionsprinzip:

$$J\dot{\vec{\omega}} = \vec{M} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\omega} = (0, \dot{\varphi}, 0)$$

$$J\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

Näherung punktförmige Kugel: $J = m\, l^2$ (mathematisches Pendel)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

kann nicht als einfache Funktion hingeschrieben werden.

Eine Möglichkeit: Differentialgleichung nähern für kleine Auslenkungen:

$$\sin\varphi = \varphi \underbrace{- \tfrac{1}{3!}\varphi^3 + \tfrac{1}{5!}\varphi^5 - \ldots}_{\text{klein für kleine } \varphi}$$

Damit ergibt sich

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Ansatz für die Funktionen:

$$\varphi(t) = A\sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\dot{\varphi}(t) = A\Omega\cos(\Omega t + \alpha)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -A\Omega^2\sin(\Omega t + \alpha)$$

Einsetzen in Dgl. liefert

$$-A\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) = -\frac{g}{l} A \sin(\Omega t + \alpha)$$

die Bestimmungsgleichung für die Frequenz:

$$\Omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Allgemeine Lösung für kleine Auslenkungen ist also:

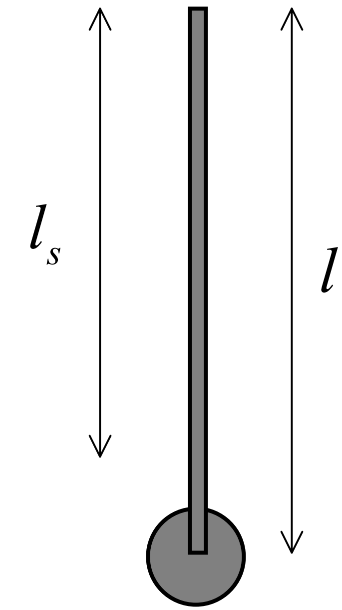
$$\varphi(t) = A \sin(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\, t + \alpha)$$

Amplitude A und Phase α müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden

Berechnung für Fadenpendel mit ausgedehnter Kugel der Masse m_K und Faden der Masse m_F:

Durch die Masse des Fadens verschiebt sich der Schwerpunkt nach oben:

$$l_s = l\,\frac{m_K + \frac{1}{2} m_F}{m_K + m_F}$$



Es ergibt sich die Differentialgleichung:

$$J\ddot{\varphi}(t) = -(m_K + m_F)\,g\,l_s\,\varphi(t)$$

Trägheitsmoment Faden: $J_F = \frac{1}{3} m_F l^2$

Trägheitsmoment Kugel: $J_K = m_K l^2 + \frac{2}{5} m_K R^2$

Trägheitsmoment gesamt: $J = m_K l^2 \left[1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{3}\frac{m_F}{m_K} \right]$

Alles zusammengefasst ergibt die Differentialgleichung:

$$m_K l^2 \left[1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{3}\frac{m_F}{m_K}\right]\ddot{\varphi}(t) = -(m_K + m_F)g\, l\,\frac{m_K + \frac{1}{2}m_F}{m_K + m_F}\varphi(t)$$

oder vereinfacht geschrieben $\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t)$

mit $$\omega^2 = \frac{g}{l}\frac{1 + \frac{1}{2}\frac{m_F}{m_K}}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{3}\frac{m_F}{m_K}}$$

$\Rightarrow$ Schwingungsdauer: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{3}\frac{m_F}{m_K}}{1 + \frac{1}{2}\frac{m_F}{m_K}}}$$

Versuch: Bestimmung von g mit Fadenpendel:

aus der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}+\frac{1}{3}\frac{m_F}{m_K}}{1+\frac{1}{2}\frac{m_F}{m_K}}}$$

erhält man

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}\left(\frac{1+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}+\frac{1}{3}\frac{m_F}{m_K}}{1+\frac{1}{2}\frac{m_F}{m_K}}\right)$$

Wichtig: kleine Amplituden verwenden, da sonst die verwendete Näherung $\sin\varphi = \varphi$ zu schlecht ist.

l	= 6.825 m	$\pm$ 0.02%
T	=	$\pm$ 0.02%
R	= 0.130 m	
m_F	= 0.350 Kg	
m_K	= 10.0 Kg	
[...]	= 0.9944	
g	= m/s^2	$\pm$ 0.06%

Numerische Lösung der exakten Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t)$$

Umschreiben in zwei Gleichungen erster Ordnung:

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t)$$

Schritt für Schritt rechnen:

$$\varphi(t+\Delta t) = \varphi(t) + \omega(t)\,\Delta t \qquad \varphi(0) = \varphi_0$$

$$\omega(t+\Delta t) = \omega(t) - \left(\frac{g}{l}\sin\varphi(t)\right)\Delta t \qquad \omega(0) = \omega_0$$

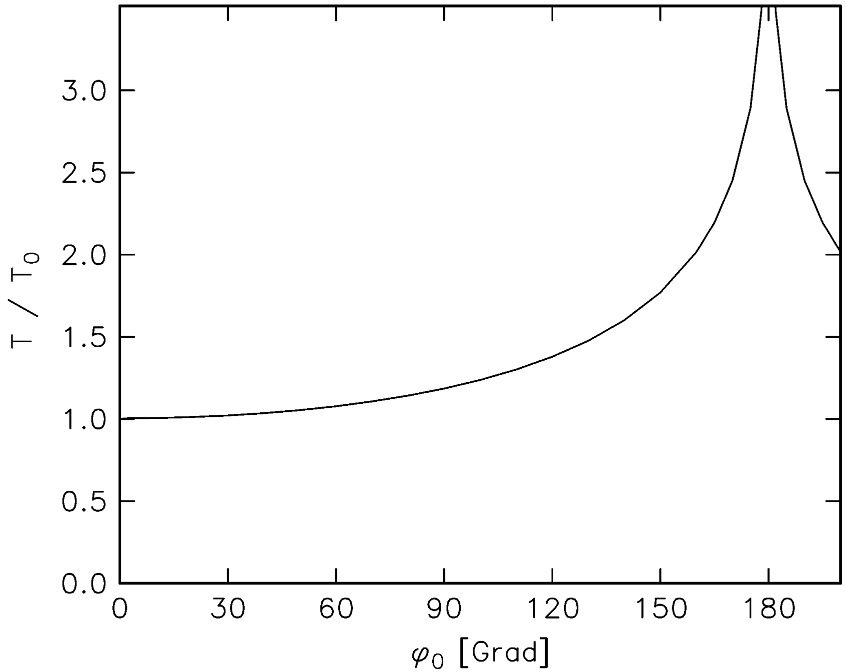
Berechnung auf dem Computer

Parameter:	$L = 1m$, $g = 9.81\ m/s^2$	
Anfangsbedingungen:	$\varphi = 45°$, $\omega = 0$ rad/s	
	$\varphi = 10°$, $\omega = 0$ rad/s	kleine Auslenkung
	$\varphi = 90°$, $\omega = 0$ rad/s	Zunahme von T
	$\varphi = 135°$, $\omega = 0$ rad/s	Zunahme von T
	$\varphi = 170°$, $\omega = 0$ rad/s	deutlich anharmonisch
	$\varphi = 178°$, $\omega = 0$ rad/s	sehr anharmonisch
	$\varphi = 179.99°$, $\omega = 0$ rad/s	sehr großes T
	$\varphi = 0°$, $\omega = 5$ rad/s	Schwingung
	$\varphi = 0°$, $\omega = 6.3$ rad/s	Überschlag
	$\varphi = 0°$, $\omega = 8$ rad/s	

Schwingungsdauer hängt von der Amplitude ab.

Für kleine Amplituden $\varphi_0 < 5°$ ist die linearisierte Dgl. geeignet.

Schwingungsdauer T als Funktion von der Auslenkung:



T_0 : Schwingungsdauer bei Amplitude $\rightarrow 0$

Diese (normierte) Kurve gilt so für jedes Fadenpendel („Stangenpendel“)

Singularität bei $\varphi = 180°$. Kein Problem: Pendel bleibt aufrecht stehen.

Wenn die Schwingungsdauer von der Auslenkung abhängt ergeben sich Bewegungen, die nicht sinusförmig sind.
$\rightarrow$ Anharmonische Schwingung

Beispiel:

Mit Laserpulsen Anregung der Elektronen in Festkörpern zu Schwingungen:
schwacher Laserpuls $\rightarrow$ kleine Amplitude $\rightarrow$ harmonische Schwingung
starker Laserpuls $\rightarrow$ große Amplitude $\rightarrow$ anharmonische Schwingung

Federpendel: Komplexer Ansatz zur Lösung der Dgl.

Die Bewegung wird vollständig beschrieben durch die Funktion

$$x(t) = A\sin(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t + \varphi)$$

Aber es gibt noch weitere Lösungen der selben Differentialgleichung.

$\rightarrow$ Komplexe Lösungen (Funktionen mit komplexen Zahlen)

Die komplexe Funktion selbst ist nicht für die Physik relevant!

Die physikalisch relevante Funktion ist reell.

Suche der komplexen Lösung und anschließend Berechnung einer reellen Lösung aus den komplexen Lösungen.

Mit komplexem Lösungsansatz lassen sich auch gedämpfte und angeregte Schwingungen behandeln.

<u>Komplexe Zahlen:</u>

$$c = (a + ib) \qquad a: \text{Realteil}, \quad b: \text{Imaginärteil}$$

$$a = \text{Re}(c), \quad b = \text{Im}(c)$$

Addition:

$$(a + ib) + (x + iy) = a + x + i(b + y)$$

Multiplikation:

$$(a + ib) \cdot (x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$$

$$i \cdot i = -1$$

Reelle Zahlen sind Teil der komplexen Zahlen (Imaginärteil = 0)

Komplexe Exponentialfunktion:

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

(Eulersche Formel)

Die Dgl. für das Federpendel lautet:

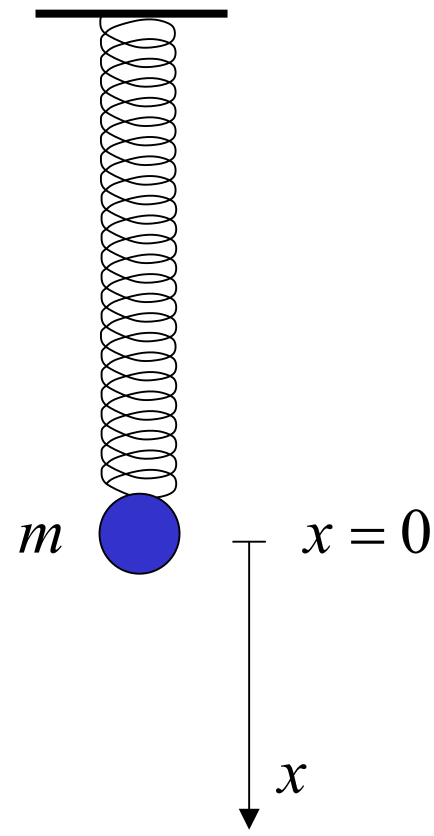
$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t)$$

komplexe Exponentialfunktion als Lösung probieren:

$$X(t) = e^{\lambda t}$$

$$\dot{X}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{X}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$



Einsetzen liefert

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\frac{D}{m} e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{-\frac{D}{m}}$$

λ Ist rein imaginär und wir schreiben abgekürzt:

$$\lambda = \pm\, i\omega \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Die allgemeine reelle Lösung ergibt sich aus einer Linearkombination der beiden komplexen Lösungen:

$$x(t) = ce^{i\omega t} + c^{*}e^{-i\omega t} = 2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t$$

mit einer beliebigen komplexen Zahl $c = a + ib$ und ihrer konjugiert komplexen Zahl $c^{*} = a - ib$.

Die Lösung kann in die gewohnte Form

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

umgeformt werden, wobei für die Konstanten gilt:

$$2a = A\cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad 2b = A\sin(\varphi)$$

Federpendel: Gedämpft durch Stokesche Reibung

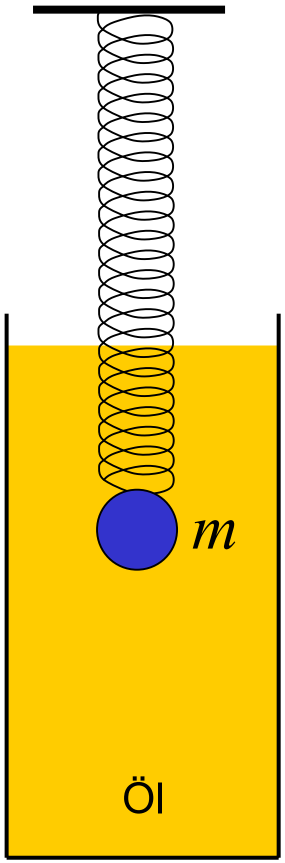
Nullpunkt von x sei in der Ruhelage.

Dort ist Gewichtskraft und Auftrieb bereits kompensiert.

Weitere Kräfte:

$$F_F = -Dx$$

$$F_R = -6\pi\eta r v$$



Bewegungsgleichung aus Aktionsprinzip:

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - 6\pi\eta r\,\dot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = 0$$

Abkürzung:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

Ansatz

$$X(t) = e^{\lambda t}$$

λ: komplex, A,φ: reelle Amplitude und Phase

$$\dot{X}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{X}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

Daraus erhält man die Bestimmungsgleichung für λ:

$$\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$$

Quadratische Gleichung mit den Lösungen:

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

1. Fall schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Radikand ist negativ

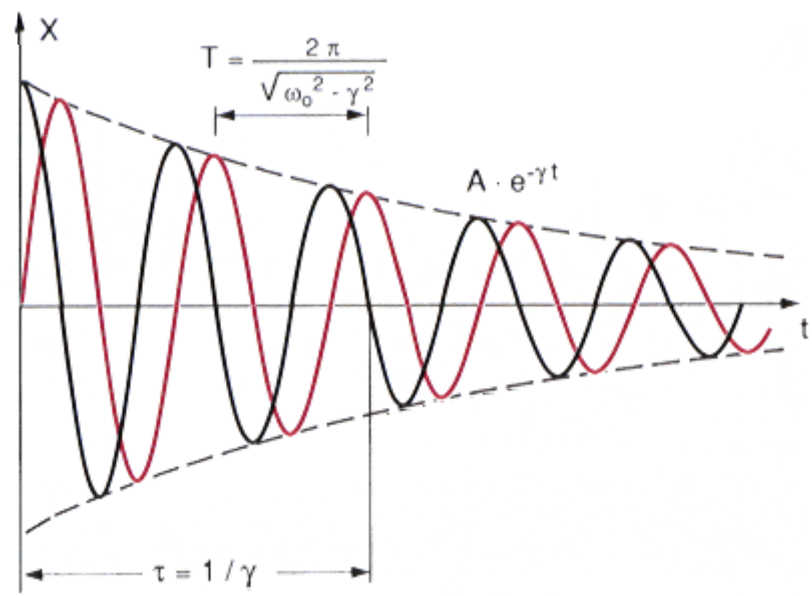
Wurzel wird imaginär. Abkürzung:

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm i\omega \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Linearkombination beider komplexen Lösungen ergibt die allgemeine Lösung

$$x(t) = c\, e^{-\gamma t + i\omega t} + c^* e^{-\gamma t - i\omega t}$$

$$= e^{-\gamma t}(2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t)$$



Oder umgeformt in die gewohnte Form

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Beachte: Schwingungsfrequenz ω ist anders als ω_0 beim ungedämpften Pendel

2. Fall starke Dämpfung: $\gamma > \omega_0$

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

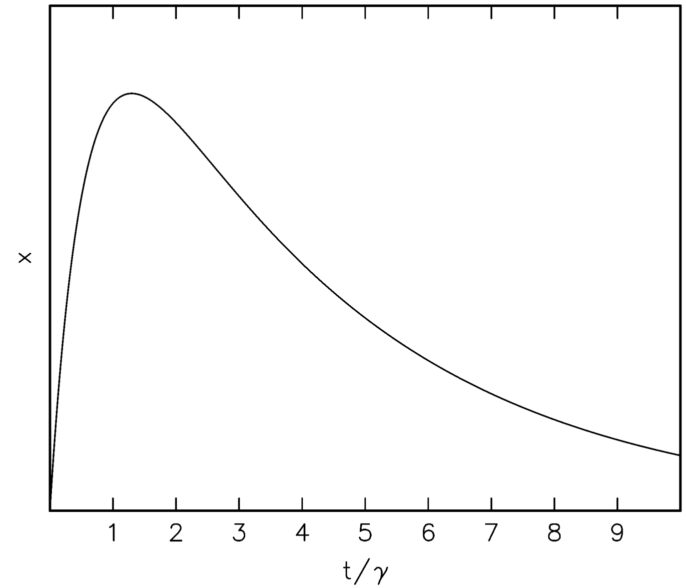
Radikand ist positiv

Wurzel bleibt reell. Abkürzung:

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \alpha \qquad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Linearkombination beider reellen Lösungen ergibt die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\,e^{-(\gamma+\alpha)t} + B\,e^{-(\gamma-\alpha)t}$$



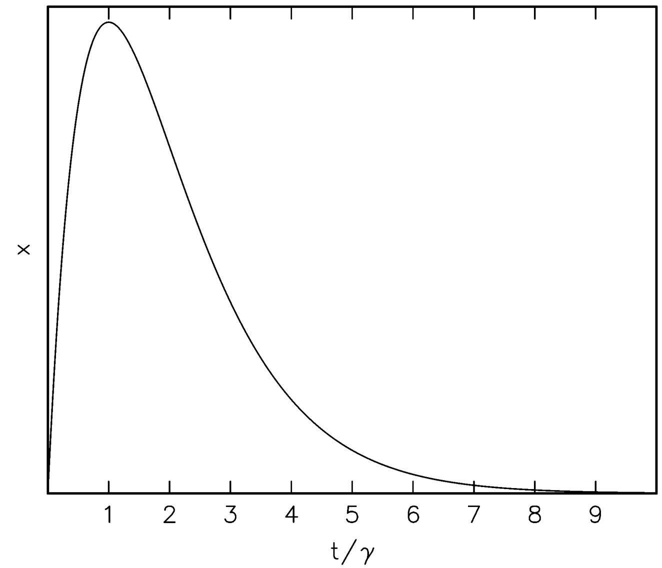
Beachte: Es gibt zwei Anteile, die unterschiedlich schnell abnehmen.

Nach einiger Zeit ist nur noch der langsam abnehmende Anteil mit $(\gamma - \alpha)$ relevant.

3. Fall aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{=0}$$

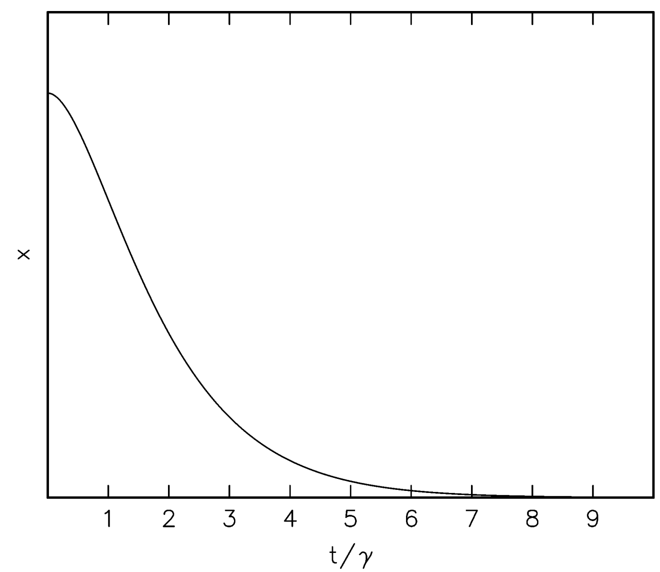
$$\lambda_{1/2} = -\gamma$$



Beide reelle Lösungen sind entartet.

Man kann zeigen, dass dann die Lösung gegeben ist durch

$$x(t) = (A + B\,t)\,e^{-\gamma t}$$



A und B lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

Anwendung z.B. in Zeigerinstrumenten und Stoßdämpfern beim Auto.

Federpendel: periodisch angeregt (erzwungene Schwingung)

Es wirke eine äußere Kraft

$$F_A(t) = F_0 \cos \omega t$$

Kräftebilanz und Dgl:

$$\ddot{x}(t) + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

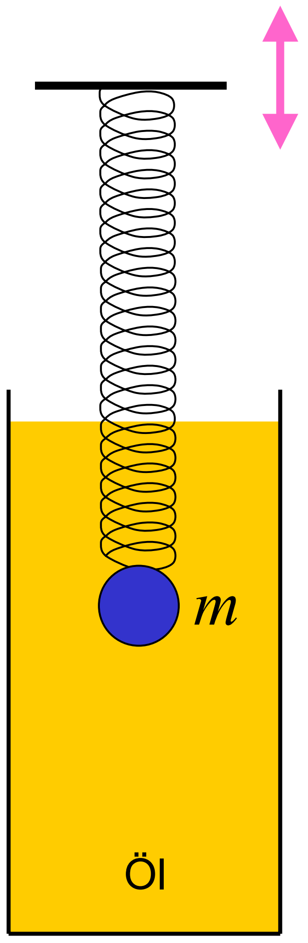
Abkürzungen:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = K\cos \omega t$$

Die äußere Kraft prägt der Schwingung die Frequenz auf.

Lösungsansatz:

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi)$$



Der erste Term verschwindet nach dem Einschwingvorgang.

Es bleibt:

$$x(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Die Anfangsbedingungen bestimmen den Einschwingvorgang.

Die Parameter A_2 und φ werden nur durch K, ω, γ, und ω_0 bestimmt.

Einsetzen von x(t) in die Dgl. liefert nach längerer Rechnung:

$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A_2 = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Das Maximum der Amplitude liegt bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

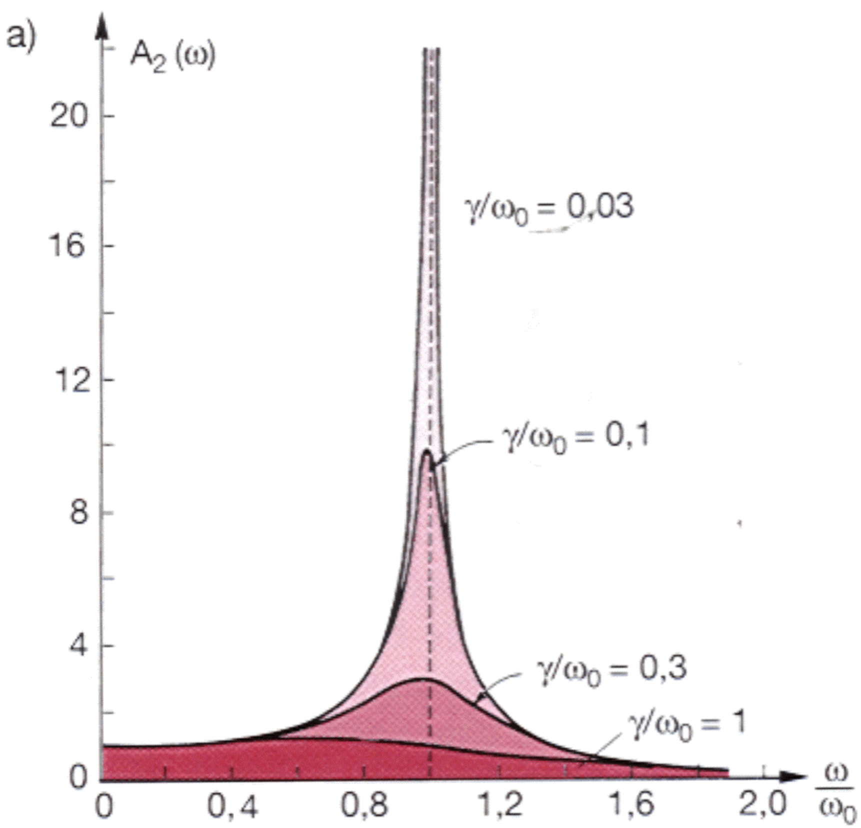
Die Amplitude ist um so größer je dichter ω an ω_0 liegt.

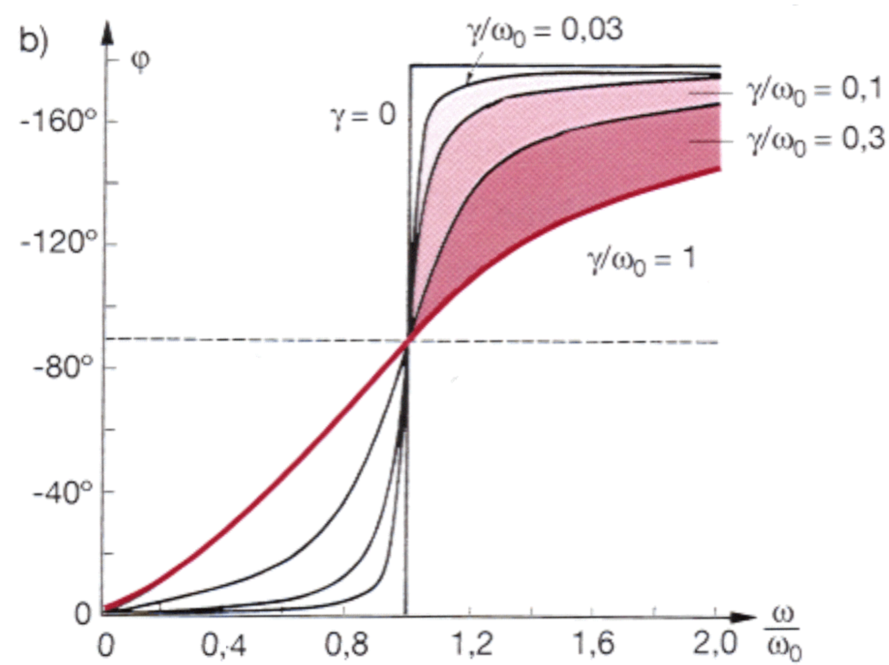
Die Resonanz ist umso schmaler je schwächer die Dämpfung ist.

Die Phase ändert sich von 0 auf $-\pi$ mit zunehmender Frequenz.

Die stärkste Phasenänderung ist bei ω_0.

Der Phasensprung ist um so abrupter je schwächer die Dämpfung ist.





Energiebilanz bei Schwingungen:

1. Ungedämpfte harmonische Schwingungen:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Mit

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m\, A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2} D\, x^2 = \tfrac{1}{2} D\, A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

folgt

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \tfrac{1}{2} D\, A^2 \underbrace{(\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi))}_{=1}$$

Die in der Schwingung gespeicherte Energie ist proportional zum Amplitudenquadrat.

2. Schwach gedämpfte harmonische Schwingungen:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Nach einer Schwingung ist die Amplitude:

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = \frac{Ae^{-\gamma(t+T)}\cos(\omega t + \omega T + \varphi)}{Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)} = e^{-\gamma T}$$

Auch die maximale Auslenkung verringert sich um $e^{-\gamma T}$

$$\Delta E_{pot} = \tfrac{1}{2} D\,(Ae^{-\gamma T})^2 - \tfrac{1}{2} D\,A^2 = \tfrac{1}{2} D\,A^2(e^{-2\gamma T} - 1)$$

Die im Mittel abgegebene Leistung ist

$$\overline{P} = \frac{\Delta E_{pot}}{T} = \frac{\tfrac{1}{2} D\,A^2(1 - e^{-2\gamma T})}{T} \approx DA^2\gamma$$

Die Energie wird nicht kontinuierlich abgegeben, denn

$$F_R = -6\pi\eta r\,\dot{x}(t)$$

3. Erzwungene Schwingung:

Nach dem Einschwingvorgang ist

$$x(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Die in der Schwingung gespeicherte Energie

$$E = E_{kin} + E_{pot}$$

ist zeitunabhängig.

Die aus der Anregung aufgenommene Leistung geht direkt in die Reibung

$$P = \vec{F}_R \cdot \vec{v} = 2\gamma m v^2 = 2\gamma m A_2^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Über eine Periode umgesetzte Arbeit:

$$W = \int_t^{t+T} P \mathrm{d}t = 2\gamma m A_2^2 \omega^2 \underbrace{\int_t^{t+T} \sin^2(\omega t + \varphi)\, \mathrm{d}t}_{= T/2}$$

Umgesetzte Arbeit pro Schwingung

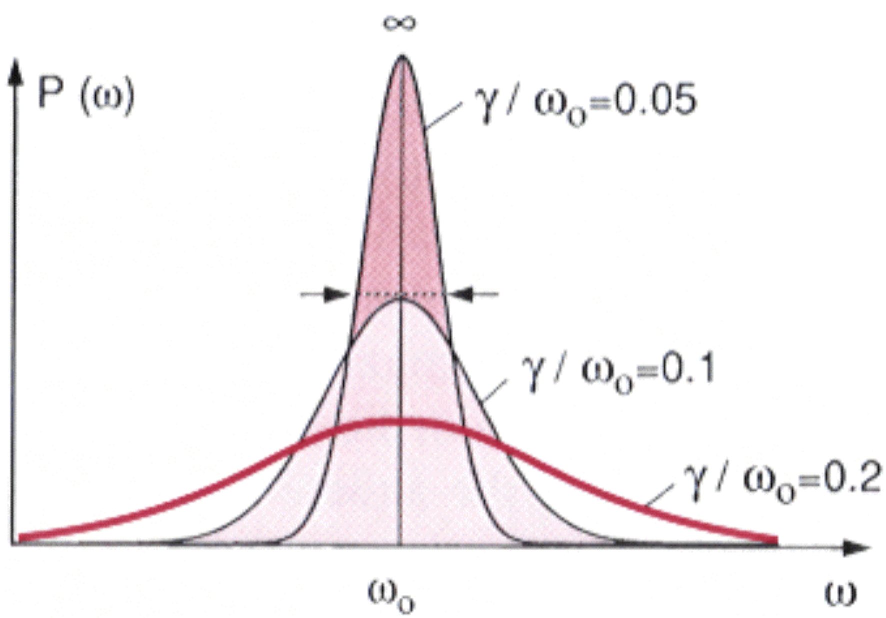
$$W = \gamma m A_2^2 \omega^2 T$$

Im zeitlichen Mittel umgesetzte Leistung:

$$\overline{P} = \frac{W}{T} = \gamma m A_2^2 \omega^2$$

Einsetzen der Amplitude A_2 liefert:

$$\overline{P}(\omega) = \frac{\gamma m \omega^2 K^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$



Die größte Leistung wird bei $\omega = \omega_0$ umgesetzt.

Die Funktion ist symmetrisch um ω_0 und zeigt wie gut die Anregung *cos* ωt an die Schwingung mit Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfung 2γ ankoppelt.