Differentialoperatoren

Gradient

Der Gradient wird auf ein skalares Feld angewendet. Das Resultat ist ein Vektor. Der Gradient zeigt an jedem Raumpunkt in die Richtung der stärksten Zunahme. Sein Betrag gibt an um wie viele Einheiten pro Meter die Größe in dieser Richtung zunimmt.

In kartesischen Koordinaten ist der Gradient der Vektor, der aus den drei räumlichen Ableitungen zusammengesetzt wird:

$$\text{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Divergenz

Die Divergenz wird auf ein Vektorfeld angewendet. Das Resultat ist ein Skalar. Die Divergenz gibt an jedem Raumpunkt die Quellstärke des Vektorfeldes an. Positive Werte zeigen eine Quelle an, negative Werte eine Senke.

In kartesischen Koordinaten ist die Divergenz die Summe von drei räumlichen Ableitungen. Dabei wird jeweils eine Komponente des Vektors nach derselben Variablen abgeleitet:

$$\text{div}\, \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Rotation

Die Rotation wird auf ein Vektorfeld angewendet. Das Resultat ist ein Vektor. Die Rotation gibt in jedem Raumpunkt die Wirbelstärke des Vektorfeldes an. Der resultierende Vektor steht so, dass der Wirbel im mathematisch positiven Sinn um den Vektor „kreist“ (rechte Hand Regel).

In kartesischen Koordinaten ist die Rotation ein Vektor, der aus verschiedenen räumlichen Ableitungen zusammengesetzt wird:

$$\text{rot}\, \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

Nabla-Operator

Der Nabla-Operator kann für eine verkürzte Schreibweise genutzt werden.

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Mit dem Nabla-Operator lassen sich Gradient, Divergenz und Rotation wie folgt schreiben:

Der Nabla-Operator ist gleich dem Gradient, wenn er auf eine skalare Funktion angewendet wird, denn

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \mathrm{grad}\, f$$

Der Nabla-Operator ist gleich der Divergenz, wenn er mit dem Skalarprodukt auf eine Vektorfunktion angewendet wird, denn

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(f_x, f_y, f_z\right) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \mathrm{div}\, \vec{f}$$

Der Nabla-Operator ist gleich der Rotation, wenn er mit dem Kreuzprodukt auf eine Vektorfunktion angewendet wird, denn

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(f_x, f_y, f_z\right) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) = \mathrm{rot}\, \vec{f}$$

Laplace-Operator

Der Laplace-Operator wird normalerweise auf eine skalare Funktion angewendet. Das Resultat ist wieder ein Skalar. Der Laplace-Operator kann mit Hilfe von „Krümmungen“ interpretiert werden. Betrachtet man beispielsweise eine zweidimensionale Fläche, dann gibt der Laplace-Operator die Summe der Krümmung in beiden Raumrichtungen an. Ist die Fläche in beiden Raumrichtungen nach oben gekrümmt, wäre das Ergebnis positiv. Ist sie in beiden Raumrichtungen nach unten gekrümmt, wäre das Ergebnis negativ. Ist die Fläche in eine Richtung nach oben und in die Andere nach unten gekrümmt (sattelförmig), dann addieren sich beide Krümmungen zu Null.

In kartesischen Koordinaten ist der Laplace-Operator die Summe von drei räumlichen zweiten Ableiten.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Der Laplace-Operator kann aus den anderen Operatoren zusammengesetzt werden:

$$\Delta f = \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, f$$

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

In seltenen Fällen wird der Laplace-Operator auch auf Vektorfelder angewendet. Damit ist gemeint, dass er auf jede Komponente des Vektorfeldes einzeln angewendet wird.

Alle Operatoren werden anders berechnet, falls Zylinder- oder Kugelkoordinaten verwendet werden.