This is the author-created version from the technical report:

Methodenentwicklung zur Simulation des thermomechanischen Verhaltens von Klebschichten in hybriden Fügeverbindungen während des Aushärteprozesses

A. MATZENMILLER, P. KÜHLMEYER

published in

„Methodenentwicklung zur Simulation des thermomechanischen Verhaltens von Klebschichten in hybriden Fügeverbindungen während des Aushärteprozesses“ Forschung für die Praxis IGF-Nr. 18895 N, Forschungsvereinigung FOSTA – Forschungsvereinigung Stahlanwendung e. V., Düsseldorf, in publication process

Institute of Mechanics
Department of Mechanical Engineering
University of Kassel
Mönchebergstr. 7
34125 Kassel
Germany

Phone: +49 561 804 2044
Fax: +49 561 804 2720
amat@uni-kassel.de

Forschungsvorhaben P 1087
Förderkennzeichen 18895 N

This author-created version comprises all contributions by A. Matzenmiller and P. Kühlmeyer to the technical report of the FOSTA research project „Methodenentwicklung zur Simulation des thermomechanischen Verhaltens von Klebschichten in hybriden Fügeverbindungen während des Aushärteprozesses“ with G. Meschut, T. Aubel.

Das IGF-Vorhaben Nr. 18895 N der Forschungsvereinigung FOSTA, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V., Sohnstraße 65, 40237 Düsseldorf wurde über die AiF im Rahmen des Programms zur Förderung der industriellen Gemeinschaftsforschung (IGF) vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages gefördert.

Kurzzusammenfassung

Bei der Verarbeitung warmaushärtender Klebstoffe in der Großserie der Automobilindustrie werden die Klebnähte innerhalb der aus einzelnen Komponenten bestehenden und zu verbindenden stahlintensiven Mischbaustruktur (Karosserie) im kataphorischen Tauchbad (KTL) gemeinsam mit der korrosionsschützenden Lackierung ausgehärtet. Die KTL-Härtung von Klebnähten erfordert nach Klebstoffauftrag einen vorgeschalteten Prozess zur Fixierung der Bauteile, der die nach Klebstoffauftrag und Fügen noch weiche Struktur stabilisiert. Diese notwendige „Handlingssteifigkeit und -festigkeit“ wird bei geklebten Stahl-Mischbaustrukturen häufig durch zusätzliche mechanische Fügepunkte erzielt, die in einem festgelegten Abstand eingetragen werden (Hybrid-Fügen). Die bei der Warmhärtung hybrid gefügter Strukturen auftretenden Fügeteildehnungen und Verschiebungen resultieren in Spannungen, die zu Schädigungen im Fügebereich in Form von Grenzschichtversagen oder Kohäsionsbrüchen führen können. Ziel des Projektes ist die Entwicklung einer Berechnungs- und Bewertungsmethode, mit der die schadensrelevanten Beanspruchungen der Verbindung in Abhängigkeit von den materiellen, geometrischen und verfahrenstechnischen Einflussgrößen bestimmt werden können. Dazu soll sowohl eine numerische Berechnungsmethode als auch eine einfache Prüfmethodik mit dazugehöriger „Faustformel“ entwickelt werden, mit der die Eignung von Klebstoffen für den KTL-Prozess bei stahlintensiven Mischbaustrukturen vergleichend bewertbar ist. Die Verbesserung von materiellen, geometrischen und verfahrenstechnischen Größen führt zu einem optimalen Leichtbau. Durch die aufgezeigten Berechnungsmethoden und Optimierungsmöglichkeiten können Stahl-Anwender eine Schädigung der Klebverbindung durch Temperaturbelastungen und den hieraus bedingten Fügeteilrelativverschiebungen während des Härteprozesses vermeiden. **Das Ziel des Forschungsvorhabens wurde somit erreicht.**

Abstract

In processing of hot-curing adhesives in mass production of the automobile industry, the adhesively bonded joints within the body in white are cured in the Electrophoretic Painting Process (E-Coat) together with the anti-corrosive paint. The curing of the adhesives requires a previous fixation process that stabilizes the structure after adhesive application. This necessary "handling stiffness and strength" is often achieved by additional mechanical joining elements in a fixed distance (hybrid joining). The steel adherend expansions and displacements in the structures occurring during hot-curing result in stresses that can lead to damage in the joint region in the form of interface or cohesive failure. The aim of the project is to develop a calculation and assessment method by which the impact on the joint depending on the physical, geometrical and procedural factors can be determined. This requires both a numerical calculation method and a simple test methodology with associated "rule of thumb" with which the suitability of adhesives for the E-Coat process of the structures can be compared and evaluated. The optimization of physical, geometrical and procedural variables leads to a targeted lightweight design with multi-material structures. By the indicated methods for calculation and optimization, users can avoid damage to the adhesive bond by temperature and the related expansions and displacements of the adherends during the curing process.

Thus, the objective of this research project was accomplished.

Inhaltsverzeichnis
Content

Abbildungsverzeichnis
List of figures **IX**

Tabellenverzeichnis
List of tables **XXIII**

1 Einleitung
Introduction **1**
1.1 Problemstellung
Problem definition 1
1.2 Motivation
Motivation 2
1.3 Zielsetzung
Objective 3

2 Stand der Technik
State of the art **4**

3 Versuchsdurchführung
Experimental **7**
3.1 Versuchswerkstoffe
Test materials 7
3.1.1 Epoxidharz-Klebstoff Nr. 1 (EP1)
Epoxy based adhesive no. 1 (EP1) 7
3.1.2 Epoxidharz-Klebstoff Nr. 2 (EP2)
Epoxy based adhesive no. 2 (EP2) 7
3.1.3 Fügeteilwerkstoff S235JRG2C
Adherend material S235JRG2C 8
3.1.4 Fügeteilwerkstoff EN AW-5182
Adherend material EN AW-5182 8
3.2 Probenformen
Specimen geometries 9
3.2.1 Dicke Zugscherproben
Thick Adherend Shear Specimen 9
3.2.2 Kopfzugproben
Butt Joint Specimen 9

3.2.3 Brückenprobe
Bridge specimen 10
3.2.4 LWF-KS 2,5 Probe
LWF-KS 2,5 Specimen 11
3.3 Versuchseinrichtungen
Testing facilities 11
3.3.1 Dynamisch Mechanische Analyse (DMA)
Dynamic Mechanical Analysis (DMA) 11
3.3.2 Materialprüfanlage
Material test facility 12
3.3.3 Universalprüfmaschine
Universal testing machine 13
3.3.4 Dynamische Differenz Kalorimetrie (DDK)
Dynamic Scanning Calorimetry (DSC) 14
3.3.5 Scherrheometer
Shear rheometer 15

4 Grunduntersuchungen zur Reaktionskinetik und zum mechanischen Verhalten
Basic investigations on reaction kinetics and mechanical behaviour 17
4.1 Grunduntersuchungen zur Reaktionskinetik
Basic investigations on reaction kinetics 17
4.1.1 Dynamische Differenzkalorimetrie (DDK) unter konstanten Ausheizraten
Dynamic Scanning Calorimetry (DSC) with konstant heating rates 17
4.1.2 Bestimmung der Glasübergangstemperatur in Abhängigkeit des Aushärtegrades
Determination of the glass transition temperature in dependence of the degree of cure 19
4.1.3 Aufstellung und Anpassung des reaktionskinetischen Modells
Development and fitting of the reaction kinetic model 21
4.1.4 Rheometer Untersuchungen zur Bestimmung des Gelpunktes
Rheometer investigations to determine the point of gelation 26
4.2 Grunduntersuchungen zur Viskoelastizität
Basic investigations on viscoelasticity 28
4.2.1 Dynamisch Mechanische Analyse des vollständig ausgehärteten Klebstoffes (DMA)
Dynamic Mechanical Analysis (DMA) of the fully cured adhesives . 28
4.2.2 Dynamisch Mechanische Analyse der teilausgehärteten Klebstoffe (DMA)
Dynamic Mechanical Analysis (DMA) of the partially cured adhesives 42
4.2.3 Zeit-Temperatur-Aushärtegrad-Verschiebungsprinzip oberhalb des Gelpunktes
Time-Temperature-Cure-Superposition above the point of gelation 49

4.2.4 Zeit-Temperatur-Aushärtegrad Verschiebungsprinzip unterhalb des Gelpunktes
Time-Temperature-Cure-Superposition below the point of gelation 54
4.3 Grunduntersuchungen zum werkstoffmechanischen Klebstoffverhalten
Basic investigations on the mechanical properties of adhesives 57
4.3.1 Dicke Scherzugprobe (DSZP)
Thick Adherend Shear Specimen (TASS) 57
4.3.2 Kopfzugprobe (KZP)
Butt Bonded Joint (BBJ) 64

5 Validierungsversuche
Validation experiments 70
5.1 Untersuchungen mit variierender Einspannlänge
Investigations with varying clamping lengths 70
5.2 Bruchbild und Bruchflächenanalyse
Fracture pattern analysis and analysis of fracture surfaces 77
5.3 Analytische Näherungslösung
Analytical approximate solution 80

6 Materialmodell für den Fertigungsprozess
Material model for the manufacturing process 83
6.1 Problembeschreibung
Problem description 83
6.2 Vernetzungskinetik und physikalische Eigenschaften
Cure kinetics and physical properties 86
6.2.1 Der Aushärtegrad als Größe für den Reaktionsfortschritt
Degree of cure as the quantity for the extend of reaction 86
6.2.2 Phasen und Phasenübergänge des Strukturklebstoffs
Phases and phase transitions of the structural adhesive 88
6.3 Motivation des Materialmodells am rheologischen Netzwerk
Motivation of the model with the rheological network 92
6.3.1 Grundelemente
Basic elements 92
6.3.2 Viskoelastische Körper
Viscoelastic bodies 94
6.3.3 Thermische Expansion und chemischer Schrumpf
Thermal expansion and chemical shrinkage 99
6.3.4 Erweitertes TAPO-Modell
Extended TAPO model 101
6.4 Thermo-chemo-viskoelastisches Kohäsivzonenmodell
Thermo-chemo-viscoelastic cohesive zone model 105
6.4.1 Faltungsintegral der viskoelastischen Spannung
Convolution integral of viscoelastic stress 105
6.4.2 Prozessabhängige Spannung
Process-dependend Stress 108

6.4.3 Thermorheologisch einfaches Materialverhalten
Thermorheologically simple material 110
6.4.4 Chemorheologisch einfaches Materialverhalten
Chemorheologically simple material 113
6.4.5 Steifigkeiten in Abhängigkeit des Aushärteprozesses
Stiffness depending on cure process 115
6.4.6 Relaxationsfunktionen im Referenzzustand
Relaxation functions in the reference condition 118
6.5 Thermo-chemische Verschiebungsdiskontinuität
Thermo-chemical displacement jump 121
6.5.1 Thermische Verschiebungsdiskontinuität
Thermal displacement jump 121
6.5.2 Chemische Verschiebungsdiskontinuität
Chemical displacement jump 122
6.6 Thermo-chemo-plastisches Kohäsivzonenmodell
Thermo-chemo-plastic cohesive zone model 123
6.6.1 Kontinuumsschädigungsmechanik
Continuum damage mechanics 123
6.6.2 Fließfunktion und Fließregel
Flow function and flow rule 125
6.6.3 Fließspannung mit nichtlinearer isotroper Verfestigung
Yield stress with nonlinear isotropic hardening 129
6.6.4 Schädigungsansatz des Kohäsivzonenmodells
Damage approach of the cohesive zone model 137
6.7 Implementierung der Materialgleichungen in LS-DYNA
Implementation of the constitutive equations into LS-DYNA 143
6.7.1 Spannungsalgorithmus
Stress algorithm 143
6.7.2 Thermo-chemo-viskoelastisch-plastisches Modell – Prädiktor-Korrektor-Verfahren
Thermo-chemo-viscoelastic-plastic model – predictor-corrector method 147

**7 Parameteridentifikation und Verifikation
Parameter identification and verification 159**
7.1 Parameter des Thermo-chemo-viskoelastischen Modellteils
Parameters of the thermo-chemo-viscoelastic model part 159
7.1.1 Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip
Time-temperature shift principle 159
7.1.2 Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsprinzip
Time-cure shift principle 163
7.1.3 Steifigkeiten der Relaxationsfunktionen des Kohäsivzonenmodells
Stiffnesses of the relaxation functions of the cohesive zone model 164

7.1.4 Anpassung der instantanen Steifigkeiten g und k an Warmfließkurven
Adaption of the instantaneous stiffnesses g and k to flow curves at certain temperatures . . . 165
7.1.5 Anpassung der ZAV-Funktionen an Fließkurven teilgehärteter Proben
Adaption of the TCS function to flow curves of partially cured specimens . . . 166
7.1.6 Ergebnis der Anpassungen
Result of adaptions . . . 167
7.2 Identifikation ausgehärteter Klebschichten bei Raumtemperatur
Identification of cured adhesives at ambient temperature . . . 169
7.2.1 Doppelrohrprobe
Double tube specimen . . . 169
7.2.2 Scher- und Kopfzugprobe
Thick adherend shear and butt joint specimen . . . 171
7.3 Warmfließkurven aus Scher- und Kopfzugversuchen
Flow curves of shear and tensile tests for certain temperatures . . . 173
7.4 Fließkurven teilausgehärteter Klebschichten aus Scher- und Kopfzugversuchen
Flow curves of shear and tensile tests with partially cured adhesives . . . 176
7.5 Ergebnis der Anpassung des TAPO-Kohäsivzonenmodells
Result of the adaption of the TAPO cohesive zone model . . . 177

**8 Validierung an Grund- und bauteilnahen Proben
Validation using basic and component-type specimens 181**
8.1 Bi-Metall-Probe
Bi-metal specimen . . . 181
8.1.1 Versuchsaufbau
Test setup . . . 181
8.1.2 FE-Modell
FE modell . . . 183
8.1.3 Ergebnis der Validierung
Result of the validation . . . 185
8.2 Scherzugproben unter definierter thermomechanischer Belastung
Thick adherend shear specimen under defined thermomechanical loading 187
8.2.1 Versuchsaufbau
Test setup . . . 187
8.2.2 FE-Modell
FE model . . . 188
8.2.3 Ergebnis der Validierung
Result of the validation . . . 189
8.3 Brückenprobe
Bridge specimen . . . 192

8.3.1 Versuchsaufbau
Test setup 192
8.3.2 FE-Modell
FE model 192
8.3.3 Ergebnis der Validierung
Result of the validation 194

**9 Zusammenfassung
Summary** **196**

**10 Danksagung
Acknowledgments** **198**

**11 Zusammenstellung aller Arbeiten, die im Zusammenhang mit dem Vorhaben veröffentlich wurden oder in Kürze veröffentlicht werden sollen
List of publications related to the project** **199**

**12 Ergebnistransfer in die Wirtschaft
Transfer to ecconomy** **201**

**13 Einschätzung zur Realisierbarkeit des vorgeschlagenen und aktualisierten Transferkonzepts
Estimation of the feasibility of the suggested transfer concept** **206**

**14 Darstellung des wissenschaftlich-technischen und wirtschaftlichen Nutzens der erzielten Ergebnisse insbesondere für KMU sowie ihres innovativen Beitrages und ihrer industriellen Anwendungsmöglichkeiten
Presentation of the scientific-technological and economical benefits** **207**

**Literaturverzeichnis
Bibliography** **216**

**A Anhang IfM
Appendix IfM** **A1**
A.1 Materialparameter des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells
Material parameters of the viscoelastic cohesive zone model A1
A.2 Herleitungen
Derivations A3
A.2.1 Nichtlineare isotrope Verfestigung
Nonlinear isotropic hardening A3
A.2.2 Chemischer Schrumpf aus [LH07]
Chemical shrinkage in [LH07] A3
A.3 Stufenversuche an Scherzugprobe
Relaxation step tests with the thick adherend shear specimen A4

A.4 Scherzugproben unter definierter thermochemischer Belastung – lokale Verschiebungen und Aushärtegrade
Thick adherend shear specimen under defined thermomechanical loading – local displacements and degree of cure A6

B Anhang LWF
Appendix LWF **A7**
B.1 Masterkurven und Pronyreihen
Master curves and prony series A7
B.2 Brückenprobe
Bridge specimen A11

Abbildungsverzeichnis

3-1	Geometrie der Dicken Scherzugprobe	9
3-2	Kopfzugprobe	10
3-3	Brückenprobe	10
3-4	LWF-KS 2,5 Probe	11
3-5	Anlagenschema der DMA 242	12
3-6	Schematischer Aufbau einer DDK-Messzelle	14
4-1	Reaktionsenthalpie des EP 1	18
4-2	Reaktionsenthalpie des EP 2	19
4-3	Glasübergangstemperaturen bei verschiedenen Heizzyklen des EP1 nach DIN EN ISO 11357-2	20
4-4	Glasübergangstemperatur in Abhängigkeit des Aushärtegrades des EP1	21
4-5	Reaktionsstufen und Reaktionstypen in Thermokinetics	23
4-6	Messwerte und Ergebnis der Parameteridentifikation des erweiterten Kamal-Modells für EP1	24
4-7	Messwerte und Ergebnis der Parameteridentifikation des erweiterten Kamal-Modells für EP2	25
4-8	Simulation verschiedener des Aushärtegradverlaufs infolge verschiedener Temperaturprofile am Beispiel des EP1	26
4-9	Speichermodul, Verlustfaktor und simulierte Reaktionskinetik für verschiedene Heizraten des EP1	28
4-10	Erstellung einer Masterkurve am Beispiel des EP1 im Modus Scherung	31
4-11	Speichermodul und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz	32
4-12	Pronyreihenanpassung an die Zeit-Temperatur Masterkurven (Schub) des vollständig ausgehärteten EP1	33
4-13	Verschiebungsfaktoren der Zeit-Temperatur-Masterkurve im Modus Scherung für EP1	34
4-14	Speichermodul und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz des EP1	35
4-15	Pronyreihenanpassung an die Zeit-Temperatur Masterkurven (Biegung) des vollständig ausgehärteten EP1	36
4-16	Verschiebungsfaktoren der Zeit-Temperatur Masterkurve im Modus Biegung für EP1	36
4-17	Speichermodul und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz des EP2	38

4-18 Pronyreihenanpassung an die Zeit-Temperatur Masterkurven (Scherung) des vollständig ausgehärteten EP2 39
4-19 Verschiebungsfaktoren der Zeit-Temperatur Masterkurve im Modus Scherung für EP2 39
4-20 Speichermodul und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz des EP2 im Modus zweiarmige Biegung 40
4-21 Pronyreihenanpassung an die Zeit-Temperatur Masterkurven (Biegung) des vollständig ausgehärteten EP2 41
4-22 Verschiebungsfaktoren der Zeit-Temperatur Masterkurve im Modus Biegung für EP2 42
4-23 Speicher- und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz und p=0,62 des EP2 44
4-24 Speicher- und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz und p=0,71 des EP2 45
4-25 Speicher- und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz und p=0,85 des EP2 46
4-26 Speicher- und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz und p=0,91 des EP2 46
4-27 Speicher- und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz und p=0,61 des EP2 47
4-28 Speicher- und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz und p=0,75 des EP2 48
4-29 Speicher- und Verlustmodul über der Temperatur für f=10Hz und p=0,85 des EP2 49
4-30 Zeit-Aushärtegrad-Masterkurvenschar bei verschiedenen Temperaturen des EP1 50
4-31 Zeit-Aushärtegrad-Masterkurvenschar bei verschiedenen Temperaturen des EP2 51
4-32 Zeit-Temperatur-Aushärtegrad-Verschiebungsprinzip und reslutierende Supermasterkurven des EP1 52
4-33 Verschiebungsfaktoren und Ergebnis der Kurvenanpassung nach Eom et al. für EP1 53
4-34 Verschiebungsfaktoren und Ergebnis der Kurvenanpassung nach Eom et al. für EP2 53
4-35 Isotherme Rheometermessung bei 130 °C für EP1 55
4-36 Isotherme Rheometermessung bei 140 °C für EP1 56
4-37 Verschiebungsfaktoren unterhalb des Gelpunktes für EP1 56
4-38 Dicke Scherzugprobe bei verschiedenen Aushärtegraden des EP1 . 58
4-39 Dicke Scherzugprobe bei verschiedenen Aushärtegraden des EP1: Burchbilder 59
4-40 Maximale Schubspannung bei verschiedenen Aushärtegraden des EP1: Burchbilder 60
4-41 Schubmodul bei verschiedenen Aushärtegraden 60
4-42 Dicke Scherzugprobe bei verschiedenen Aushärtegraden des EP2 . 61

4-43 Dicke Scherzugprobe bei verschiedenen Aushärtegraden des EP2: Burchbilder . . . 62
4-44 Maximale Schubspannung bei verschiedenen Aushärtegraden . . . 62
4-45 Schubmodul bei verschiedenen Aushärtegraden . . . 63
4-46 Kopfzugprobe bei verschiedenen Aushärtegraden des EP1 . . . 64
4-47 Kopfzugprobe bei verschiedenen Aushärtegraden des EP1: Burchbilder . . . 65
4-48 Maximale Schubspannung bei verschiedenen Aushärtegraden . . . 66
4-49 E-Modul bei verschiedenen Aushärtegraden . . . 66
4-50 Kopfzugprobe bei verschiedenen Aushärtegraden des EP2 . . . 67
4-51 Kopfzugprobe bei verschiedenen Aushärtegraden des EP2: Burchbilder . . . 68
4-52 Maximale Schubspannung bei verschiedenen Aushärtegraden . . . 69
4-53 Schubmodul bei verschiedenen Aushärtegraden des EP2 . . . 69

5-1 Versuchsaufbau Brückenprobe . . . 71
5-2 Relativverschiebung der Brückenprobe bei einer Probenlänge von 400 mm . . . 72
5-3 Biegelinie der Brückenprobe mit einer Länge von 400 mm in Abhängigkeit der Temperatur . . . 73
5-4 Relative Verschiebung der Brückenprobe mit einer Probenlänge von 300 mm . . . 74
5-5 Biegelinie der Brückenprobe mit einer Länge von 300 mm in Abhängigkeit der Temperatur . . . 74
5-6 Relative Verschiebung der Brückenprobe mit einer Probenlänge von 200 mm . . . 76
5-7 Biegelinie der Brückenprobe mit einer Länge von 200 mm in Abhängigkeit der Temperatur . . . 76
5-8 Probenseparierung der LWF KS 2,5 Proben . . . 77
5-9 Bereiche der Probenseparierung der LWF KS 2,5 Proben . . . 77
5-10 Ermittlung der effektiv tragenden Klebfläche am Beispiel einer Klebflächenreduktion um 95 Prozent . . . 78
5-11 Ausgewählte Bruchbilder der separierten Brückenprobe . . . 79
5-12 Bruchflächen in Abhängigkeit der maximalen relativen Verschiebung in z-Richtung anhand der Restzugversuche separierter LWF KS 2,5 Proben . . . 80
5-13 Euler Knickfälle 2 und 4 . . . 81
5-14 Ergebnis der Kurvenanpassung des zweiten Eulerschen Knickfalles an die Messergebnisse der Brückenprobe bei 180 °C . . . 82

6-1 Zeit-Temperatur Phasendiagramm nach [EG83b] . . . 89
6-2 Rheologische Grundelemente . . . 93
6-3 Modelle vom MAXWELL-Typ . . . 95
6-4 Spezifisches Volumen v in Abhängigkeit der Temperatur θ – vgl. [Sch90, S. 111, Abb. 6.3] . . . 99

6-5 Thermo-chemo-viskoelastisch-plastisches Materialmodell im eindimensionalen rheologischen Netzwerk 102
6-6 Thermo-chemo-viskoelastisch-plastisches Kohäsivzonenmodell im rheologischen Netzwerk 107
6-7 Qualitativer Verlauf der Relaxationsfunktion $R_{\mathrm{n}}(t)$ über der logarithmischen Zeitachse $\log t$ für thermorheologisch einfache Materialien bei verschiedenen Temperaturen θ 111
6-8 Qualitativer Verlauf der Relaxationsfunktion $R_{\mathrm{n}}(t)$ über der logarithmischen Zeitachse $\log t$ für chemorheologisch einfache Materialien bei verschiedenen Aushärtegraden p nach [AM96] 113
6-9 Qualitativer Verlauf der Relaxationsfunktion $R_{\mathrm{n}}(t)$ über der logarithmischen Zeitachse $\log t$ eines chemorheologisch einfachen Materials bei verschiedenen Aushärtegraden p nach [AM96] mit aushärtegradabhängiger Gleichgewichtssteifigkeit k_∞ 115
6-10 Gleichgewichtszug- (a) und Gleichgewichtsschubsteifigkeit (b) für verschiedene Gelpunkte $p_{\mathrm{gel}} = 0.5,\ 0.45,\ 0.4,\ 0.35$ und 0.3 als Funktionen des Aushärtegrads p 117
6-11 (a) Wärmeausdehnungskoeffizient $\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ und (b) Temperaturverschiebung $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ als Funktionen der Temperatur θ und des Aushärtegrads p 122
6-12 Motivation der Schädigung: defektfreier Körper ohne Belastungsgeschichte (links), defektbehafteter Körper im physikalischen Raum (Mitte) und schädigungsfreies Material im effektiven Raum (rechts) . 123
6-13 (links) Fließortkurven (6-125), (6-126) und plastisches Potential (6-128) des räumlichen Kontinuums im Invariantenraum – vgl. [Bur15, S. 56, Abb. 6.5] – und (rechts) Fließortkurve (6-133) und plastisches Potential (6-134) der Grenzfläche – vgl. [Bur15, S. 108, Abb. 7.16] . 126
6-14 Verlauf des Materialparameters $\tilde{a}_2$ (6-139) über der Temperatur θ (links) und qualitativer Verlauf der Fließfunktion $\tilde{f}$ (6-138) in Abhängigkeit der Temperatur θ 130
6-15 Fließspannung τ_{y} (6-140) über akkumulierter plastischer Bogenlänge r 131
6-16 Anfangsfließspannung τ_θ (6-147) als Funktion der Temperatur θ . . 133
6-17 Temperaturfunktionen der Verfestigungsparameter q_θ (6-148) (links) und b_θ (6-149) (rechts) 134
6-18 Temperaturabhängiger Verfestigungsmodul H_θ (links) und Aushärtegradfunktion der Anfangsfließspannung χ_{c} (rechts) 135
6-19 Aushärtegradfunktion der Verfestigungsspannung ϕ_{c} (links) und Temperatur- und aushärtegradabhängige Fließspannung $\tau_{\mathrm{y}}(\theta, p, r)$ (rechts) bei Raumtemperatur $\theta = \theta_0$ 136
6-20 Verlauf der Schädigung D (6-156) über Δ^{vp} (6-155) für verschiedene Exponenten n_{D} (links) und kritischer Verschiebungssprung Δ^{c} (6-160) und Bruchverschiebungssprung Δ^{f} (6-161) über T (rechts) für $d_4 = 0.0$ – vgl. [BBB$^+$13, S. 268, Abb. 252] und [P8714, Abb. 6.16] . 138

6-21 Temperaturfunktion (6-162) des kritischen und Bruchverschiebungssprungs . . . 139
6-22 Aushärtegradfunktion des kritischen (links) und Bruchverschiebungssprungs (rechts) . . . 141
6-23 Algorithmus zur Berechnung des viskoelastischen Faltungsintegrals als Prädiktorspannung im Spannungsalgorithmus des thermo-viskoelastisch-plastischen Modells . . . 150
6-24 Algorithmus für die Spannungskorrektur beim Auftreten von plastischem Fließen . . . 156
6-25 Spannungsalgorithmus . . . 157

7-1 Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip . . . 160
7-2 Verläufe der Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen (6-90) und (6-91) mit den Materialparametern in Tabelle 7-1 und den Zeit-Temperatur-Verschiebungsfaktoren über der Temperatur θ . . . 161
7-3 Schar der Relaxationsfunktionen $\tilde{E}(t)$ und $\tilde{G}(t)$ in Abhängigkeit der Temperatur T mit den Parametern des LWF aus der Dynamisch-mechanischen Analyse . . . 162
7-4 Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen mit Materialparametern des LWF und IfM über dem Aushärtegrad p . . . 163
7-5 Schar der Relaxationsfunktionen $E(t)$ und $G(t)$ in Abhängigkeit des Aushärtegrads p mit den Parametern des LWF aus der Dynamisch-mechanischen Analyse . . . 164
7-6 Anpassung der instantanen Steifigkeiten k und g des LWF aus der DMA an die Warmfließkurvenschar der quasistatisch zügigen Scher- und Kopfzugversuche unter der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ . . . 167
7-7 Anpassung der Materialparameter der Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen des LWF aus der DMA an die Fließkurvenschar der quasistatisch zügigen Scher- und Kopfzugversuche mit teilgehärteten Klebschichten unter der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ – s. Tabelle 7-2 . . . 168
7-8 Ergebnis der Optimierung an den Messdaten der quasistatisch zügigen Scher- und Kopfzugversuche aus [P8714] mit ausgehärteter Klebschicht bei Raumtemperatur $T_0 = 22\,$°C bzw. $\theta_0 = 295.15\,$K unter der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ . . . 171
7-9 Ergebnis der Optimierung an den Messdaten der Warmfließkurvenschar quasistatisch zügiger Scher- und Kopfzugversuche aus Bericht [P8714] mit ausgehärteter Klebschicht für die Temperaturen $T = 40\,$°C, $60\,$°C und $80\,$°C unter der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ 175
7-10 Anpassung des Konstitutivmodells an die an die Warmfliesskurven aus Scher- (a) und Kopfzugversuchen (b) des LWF von Raumtemperatur bis 80 °C sowie an Fließkurven aus Scher- (c) und Kopfzugversuchen (d) des LWF mit teilausgehärteten Klebschichten oberhalb des Gelpunkts $p_{\mathrm{gel}} = 0.6$ unter quasistatisch zügiger Randbedingung mit der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ . . . 178

8-1 Prinzipskizze der Bi-Metall-Probe mit Abmessungen in [mm] 182
8-2 FE-Modell der Bi-Metall-Probe 183
8-3 Zeit-Temperaturverläufe für die FE-Simulation der Bi-Metall-Probe mit ausgehärteter Klebschicht unter Betriebslast (links) und die Aushärtung der Klebschicht in der Fertigung (rechts) 184
8-4 Ergebnisse der Validierung an der Durchsenkung u_z (a) und Relativverschiebung Δu_x (b) der Bi-Metall-Probe mit ausgehärteter Klebschicht und Durchsenkung u_z (c) und Relativverschiebung Δu_x der Bi-Metall-Probe mit Aushärtung der Klebschicht im Versuch 186
8-5 Zeit-Temperatur- (a) und Zeit-Aushärtegradverläufe (b) aus der Simulation der Versuche an der Scherzugprobe 187
8-6 FE-Modell der Scherzugprobe 188
8-7 Randbedingungen (a), lokale Verschiebungssprünge in der Klebschicht (b), Kraft-Weg- (c) und Kraft-Zeitverläufe (c) aus den FE-Simulation für die Relativverschiebung der Klebschicht $0.2\,\mathrm{mm}$ $0.3\,\mathrm{mm}$ der thermoviskoelastisch-plastischen Versuche an der Scherzugprobe in [P8714] 190
8-8 Randbedingungen (a), lokale Verschiebungssprünge in der Klebschicht (b), Kraft-Weg- (c) und Kraft-Zeitverläufe (c) aus den FE-Simulation für die Relativverschiebung der Klebschicht $0.4\,\mathrm{mm}$ $0.5\,\mathrm{mm}$ der thermoviskoelastisch-plastischen Versuche an der Scherzugprobe in [P8714] 191
8-9 FE-Modell der Brückenprobe vollständig (a), ohne Deckblech (b) und unter Ausnutzung der Spiegelsymmetrien (c) 193
8-10 Zeit-Temperaturkurven $T(t)$ und Relativverschiebungen Δu_z zwischen dem Stahlprofil und Aluminiumblech für die Versuche mit $T_{\max} = 180\,°\mathrm{C}$, $150\,°\mathrm{C}$ und $130\,°\mathrm{C}$ 195

A-1 (a) und (b) lokale Gleitung in der Klebschicht $\tan\gamma$ über der Zeit t und Auswertung der Schubspannung τ über der Gleitung $\tan\gamma$ (c) und in der Zeit t (d) A5
A-2 Darstellung der zeitlichen Verläufe der lokalen Verschiebung der Klebschicht $\Delta_\mathrm{t}(t)$ und des Aushärtegrads $p(t)$ A6

B-1 Zeit-Temperatur-Masterkurvenschar des EP1 . . . . . A7
B-2 Zeit-Temperatur-Masterkurvenschar des EP2 . . . . . A7
B-3 Supermasterkurve des EP2 . . . . . A10
B-4 Relativverschiebung der Brückenprobe bei einer Probenlänge von 400 mm, Versuch 2 . . . . . A11
B-5 Relativverschiebung der Brückenprobe bei einer Probenlänge von 400 mm, Versuch 3 . . . . . A12
B-6 Relative Verschiebung der Brückenprobe, Versuch 1, 2 und 3 . . . . A12
B-7 Relative Verschiebung der Brückenprobe mit einer Probenlänge von 300 mm, Versuch 1 . . . . . A13
B-8 Relative Verschiebung der Brückenprobe mit einer Probenlänge von 300 mm, Versuch 2 . . . . . A13

B-9 Biegelinie der Brückenprobe mit einer Länge von 200 mm in Abhängigkeit der Temperatur, ohne Klebschicht A14

List of Figures

3-1	Geometry of the Thick Adherend Shear Specimen	9
3-2	Butt Joint Specimen	10
3-3	Bridge Specimen	10
3-4	LWF-KS 2,5 Specimen	11
3-5	System Layout of the DMA 242	12
3-6	Schematic structure of a DSC measuring cell	14
4-1	Reaction enthalpy of EP 1	18
4-2	Reaction enthalpy of EP 2	19
4-3	Glass transition temperatures for various heating cycles of EP1 according to DIN EN ISO 11357-2	20
4-4	Glass transition temperature in dependence of the state of cure of EP1	21
4-5	Reaction steps and reaction types in Thermokinetics	23
4-6	Measurement results and parameter identification of the extended Kamal model for EP1	24
4-7	Measurement results and parameter identification of the extended Kamal model for EP2	25
4-8	Simulation of different curing degree curves due to different temperature profiles based on the example of EP1	26
4-9	Storage modulus, loss factor and simulated reaction kinetics for different heating rates of EP1	28
4-10	Creatoin of a time-temperature-mastercurve of EP1 in shearmode	31
4-11	Storage modulus and loss modulus versus temperature for f=10 Hz	32
4-12	Prony series fitting to the time-temperature master curves of the fully cured EP1	33
4-13	Shift factors of the time-temperature master curve in shear mode for EP1	34
4-14	Storage modulus and loss modulus versus temperature for f=10 Hz of EP1	35
4-15	Prony series fitting to the time-temperature master curves (bending) of the fully cured EP1	36
4-16	Shift factors of the time-temperature master curve in bending mode for EP1	36
4-17	Storage modulus and loss modulus versus temperature for f=10 Hz of EP2	38
4-18	Prony series fitting to the time-temperature master curves (shear) of the fully cured EP2	39

4-19 Shift factors of the time-temperature master curve in shear mode for EP2 . . . 39
4-20 Storage modulus and loss modulus versus temperature for f=10 Hz of EP2 in bending mode . . . 40
4-21 Prony series fitting to the time-temperature master curves (bending) of the fully cured EP2 . . . 41
4-22 Shift factors of the time-temperature master curve in bending mode for EP2 . . . 42
4-23 Storage and loss modulus versus temperature for f=10Hz and p=0.62 of EP2 . . . 44
4-24 Storage and loss modulus versus temperature for f=10Hz and p=0.71 of EP2 . . . 45
4-25 Storage and loss modulus versus temperature for f=10Hz and p=0.85 of EP2 . . . 46
4-26 Storage and loss modulus versus temperature for f=10Hz and p=0.91 of EP2 . . . 46
4-27 Storage and loss modulus versus temperature for f=10Hz and p=0.61 of EP2 . . . 47
4-28 Storage and loss modulus versus temperature for f=10Hz and p=0.75 of EP2 . . . 48
4-29 Storage and loss modulus versus temperature for f=10Hz and p=0.85 of EP2 . . . 49
4-30 Time-cure-superposition at varying temperatures for EP1 . . . 50
4-31 Time-cure-superposition at varying temperatures for EP2 . . . 51
4-32 Time-temperature-cure superposition principle and resluting super-master curves of EP1 . . . 52
4-33 Shift factors and curve fitting result according to Eom et al. for EP1 . 53
4-34 Shift factors and curve fitting result according to Eom et al. for EP2 . 53
4-35 Isothermal rheometer measurement at 130 °C . . . 55
4-36 Isothermal rheometer measurement at 140 °C . . . 56
4-37 Shift factors below the point of gelation for EP1 . . . 56
4-38 Thick Adherend Shear Specimen for varying states of cure of EP1 . 58
4-39 Thick Adherend Shear Specimen for varying states of cure of EP1: fracture pattern . . . 59
4-40 Maximum shear stress for varying states of cure of EP1: fracture pattern . . . 60
4-41 Young's modulus for varying states of cure of EP1 . . . 60
4-42 Thick Adherend Shear Specimen for varying states of cure of EP2 . 61
4-43 Thick Adherend Shear Specimen for varying states of cure of EP2: fracture pattern . . . 62
4-44 Maximum shear stress for varying states of cure of EP2 . . . 62
4-45 Modulus of Shear for varying states of cure of EP2 . . . 63
4-46 Butt Bonded Joint Specimen for varying states of cure of EP1 . . . 64
4-47 Butt Bonded Joint Specimen for varying states of cure of EP1: fracture pattern . . . 65

4-48 Maximum shear stress for varying states of cure of EP2 66
4-49 Young's modulus for varying states of cure of EP2 66
4-50 Butt Bonded Joint Specimen for varying states of cure of EP2 67
4-51 Butt Bonded Joint Specimen for varying states of cure of EP2: fracture pattern 68
4-52 Maximum shear stress for varying states of cure of EP2 69
4-53 Modulus of Shear for varying states of cure of EP2 69

5-1 Experimental setup bridge specimen 71
5-2 Relative displacement of the bridge specimen with a length of 400 mm 72
5-3 Bendline of the bridge sample with a length of 400 mm in dependence of the temperature 73
5-4 Relative displacement curves of the bridge specimen with a length of 300 mm 74
5-5 Bendline of the bridge sample with a length of 300 mm in dependence of the temperature 74
5-6 Relative displacement curves of the bridge specimen with a length of 200 mm 76
5-7 Bendline of the bridge sample with a length of 200 mm in dependence of the temperature 76
5-8 Separation process of LWF KS 2,5 specimens 77
5-9 Location of the separation process of LWF KS 2,5 specimens 77
5-10 Determination of the effective load-bearing adhesive area using the example of a 95 percent reduction in adhesive area 78
5-11 Selected fracture patterns of the separated bridge specimen 79
5-12 Fractured surfaces dependend on the maximum relative displacement in the z-direction using the residual tensile tests of separated LWF KS 2.5 samples 80
5-13 Euler buckling case 2 and 4 81
5-14 Result of the curve fitting of the second Euler buckling case to the measurement results of the bridge sample at 180 °C 82

6-1 Time-temperature transition diagram following [EG83b] 89
6-2 Rheological basic elements 93
6-3 Models of the MAXWELL-type 95
6-4 Specific volum v as function of temperature θ—cf [Sch90, S. 111, Abb. 6.3] 99
6-5 Thermo-chemo-viscoelastic-plastic material model in one-dimensional rheological network 102
6-6 Thermo-chemo-viscoelastic-plastic cohesive zone model in rheological network 107
6-7 Qualitative course of relaxation function $R_{\mathrm{n}}(t)$ over logarithmic time scale $\log t$ of thermorheologically simple material for different temperatures θ 111

6-8 Qualitative course of relaxation function $R_{\mathrm{n}}(t)$ over logarithmic time scale $\log t$ of chemorheologically simple material for different degrees of cure p following [AM96] 113
6-9 Qualitative course of relaxation function $R_{\mathrm{n}}(t)$ over logarithmic time scale $\log t$ for different degrees of cure p following [AM96] with cure dependend equilibrium stiffness $k_{\infty}(p)$ 115
6-10 Equilibrium normal and shear stiffness for gel points $p_{\mathrm{gel}} = 0.5$, 0.45, 0.4, 0.35 and 0.3 as functions of degree of cure p 117
6-11 (a) thermal expansion coefficient $\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ and (b) thermal displacement jump $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ as functions of temperature θ and degree of cure p 122
6-12 Motivation of Damage: defect free body without loading (left), defect body in the physical space (middle) and undamaged material in the effective space Raum (right) 123
6-13 (left) flow curve (6-125), (6-126) and plastic potential (6-128) of spatial continuum in the domain of invariants—cf [Bur15, S. 56, Abb. 6.5]—and (right) flow curve (6-133) and plastic potential (6-134) of the interface—cf [Bur15, S. 108, Abb. 7.16] 126
6-14 Course of $\tilde{a}_2$ (6-139) over temperature θ (left) and qualitativ course of flow function $\tilde{f}$ (6-138) with respect to temperature θ 130
6-15 Yield stress τ_{y} (6-140) over accumulated plastic arclength r 131
6-16 Temperature dependency of yield threshold τ_{θ} (6-147) 133
6-17 Temperature functions of hardening parameters q_{θ} (6-148) (left) and b_{θ} (6-149) (right) 134
6-18 Temperature dependend hardening modulus H_{θ} (left) and yield threshold as function of cure χ_{c} (right) 135
6-19 Function of cure for hardening stress ϕ_{c} (left) and temperature and cure dependend flow stress $\tau_{\mathrm{y}}(\theta, p, r)$ (right) at ambient temperature $\theta = \theta_0$ 136
6-20 course of damage D (6-156) over Δ^{vp} (6-155) for different exponents n_{D} (left) and critical displacement jump Δ^{c} (6-160) and fracture displacement jump Δ^{f} (6-161) over T (right) for $d_4 = 0.0$—cf [BBB+13, S. 268, Abb. 252] and [P8714, Abb. 6.16] 138
6-21 Temperature function (6-162) of critical und fracture displacement jump 139
6-22 Critical (left) and fracture displacement jump (rechts) as function of degree of cure 141
6-23 Algorithm of viscoelastic convolution integral as predictor stress in stress algorithm of thermo"=viscoelastic"=plastic model 150
6-24 Algorithm of stress correction during plastic flow 156
6-25 Stress algorithm 157

7-1 Time-temperature shift principle 160

7-2 Courses of time-temperature shift functions (6-90) and (6-91) with parameters in Tabelle 7-1 and time-temperature shift factors over temperature θ 161

7-3 Array of relaxation functions $\tilde{E}(t)$ and $\tilde{G}(t)$ as function of temperature T with parameters by LWF of the dynamic mechanical analysis 162

7-4 Time-cure shift functions with parameters by LWF and IfM over degree of cure p 163

7-5 Array of relaxation functions $E(t)$ and $G(t)$ as functions of degree of cure p with parameters by LWF of the dynamical mechanical analysis164

7-6 Adaption of instantaneous stiffnesses k and g by LWF of DMA to flow curves of quasi static shear and tensile tests for certain temperatures as well as shearing and tensile rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ 167

7-7 Adaption of instantaneous stiffnesses k and g by LWF of DMA to flow curves of quasi static shear and tensile tests for partially cured adhesives as well as shearing and tensile rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ 168

7-8 Result of the optimisation to the measurement data of quasi static shear and tensile tests in [P8714] with cured adhesive at ambient temperature $T_0 = 22\,℃$ respectively $\theta_0 = 295.15\,\mathrm{K}$ and shear and strain rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ 171

7-9 Result of the optimisation to the measurement data of quasi static shear and tensile tests in [P8714] with cured adhesive at differents temperatures $T = 40\,℃$, $60\,℃$ und $80\,℃$ under shear and strain rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ 175

7-10 Adaption of the constitutive model to the flow curves of test with the thick adherend shear (a) and butt joint specimen (b) between ambient temperature and 80 ℃ as well as test with the thick adherend shear (c) and butt joint specimen (d) with partially cured adhesives beyond gel point $p_{\mathrm{gel}} = 0.6$ under quasi static loading conditions with shear and strain rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ 178

8-1 Principle of bimetallic test with dimensions in [mm] 182

8-2 FE model of the bimetal specimen 183

8-3 Time-temperature courses of the FE simulation of the bimetal specimen with cured adhesive under service loading (left) und curing of the adhesive during the test under manufacturing loading (right) . . 184

8-4 Result of the deflection u_z (a) and relative displacement Δu_x (b) at the bimetal specimen with cured adhesive and the deflection u_z (c) and relative displacement Δu_x during cure of the adhesive in the test 186

8-5 Time-temperatur course(a) and time-cure course(b) of the simulation of the test with the thick adherend shear specimen 187

8-6 FE model of the thick adherend shear specimen 188

8-7 Boundary conditions (a), local displacement jumps in the adhesive (b), force-displacement course (c) and force-time course (c) of the FE simulation for the relative displacement of the adhesive 0.2 mm 0.3 mm of the thermoviscoelastic-plastic tests with the thick adherend shear specimen in [P8714] 190
8-8 Boundary conditions (a), local displacement jumps in the adhesive (b), force-displacement course (c) and force-time course (c) of the FE simulation for the relative displacement of the adhesive 0.4 mm 0.5 mm of the thermoviscoelastic-plastic tests with the thick adherend shear specimen in [P8714] 191
8-9 FE model of the whole bridge specimen (a), without cover plate (b) and with respect to the mirror symmetries (c) 193
8-10 Time-temperature courses (left) and relative displacements Δu_z between the steel profile and the aluminium cover plate for the tests with $T_{\max} = 180$ °C, 150 °C und 130 °C 195

A-1 (a) and (b) local shear strain in the adhesive $\tan\gamma$ over time t and shear stress τ over shear strain $\tan\gamma$ (c) and time t (d) A5
A-2 Local displacement in the adhesive $\Delta_{\mathrm{t}}(t)$ and degree of cure $p(t)$ over time t A6

B-1 Time-temperature master curves of EP1 . . . . . A7
B-2 Time-temperature master curves of EP2 . . . . . A7
B-3 Super master-curve of EP2 . . . . . A10
B-4 Relative displacement of the bridge specimen with a length of 400 mm, experiment 2 . . . . . A11
B-5 Relative displacement of the bridge specimen with a length of 400 mm, experiment 3 . . . . . A12
B-6 Relative displacement curves of the bridge specimen, test 1, 2 and 3 A12
B-7 Relative displacement curves of the bridge specimen with a length of 300 mm, experiment 1 . . . . . A13
B-8 Relative displacement curves of the bridge specimen with a length of 300 mm, experiment 2 . . . . . A13
B-9 Bendline of the bridge sample with a length of 200 mm in dependence of the temperature without adhesive layer A14

Tabellenverzeichnis

3-1	Technische Daten des Klebstoffs EP1	7
3-2	Technische Daten des Klebstoffs EP2	8
3-3	Technische Daten des Werkstoffs S235JRG2C	8
3-4	Technische Daten des Werkstoffs EN AW-5182	8
3-5	Technische Daten der Universalprüfmaschine Zwick Z100	14
3-6	Technische Daten des MCR 501	16
4-1	Identifizierte Parameter für den Zusammenhang der Glasübergangstemperatur über dem Aushärtegrad für EP1	21
4-2	Identifizierte Parameter des verallgemeinerten Kamal Modells für EP1	24
4-3	Identifizierte Parameter des verallgemeinerten Kamal Modells für EP2	25
4-4	Identifizierte Aushärtegrade am Maximum des Verlustfaktors des EP1	27
4-5	Identifizierte Parameter der WLF-Gleichung im Modus Scherung des EP1	34
4-6	Identifizierte Parameter der WLF-Gleichung im Modus Biegung des EP1	35
4-7	Identifizierte Parameter der WLF-Gleichung im Modus Scherung des EP2	38
4-8	Identifizierte Parameter der WLF-Gleichung im Modus Biegung des EP2	41
4-9	Identifizierte Parameter der Verschiebungsfunktion nach Eom et al. für EP1	52
4-10	Identifizierte Parameter der Verschiebungsfunktion nach Eom et al. für EP2	52
6-1	Regeln für die Netzwerkbildung [BM13a]	96
6-2	Ansätze für den chemischen Schrumpf	101
6-3	Zusammenstellung der Konstitutivgleichungen des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells	120
6-4	Konstitutivgleichungen des temperatur- und aushärtegradabhängigen Toughened-Adhesive-Polymer-Kohäsivzonenmodells	142
7-1	Materialparameter der Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$ und $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$	161
7-2	Materialparameter der Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen $a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}$ und $a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}$	165

7-3 Materialparameter des TAPO-Kohäsivzonenmodells aus der Anpassung an die Messdaten aus Versuchen an der Doppelrohrprobe für ein und mehrachsige Beanspruchungen aus [P9515a, S. 191, Tab. 7-4] 170
7-4 Materialparameter des reduzierten TAPO-Modells nach der Anpassung an die Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche mit ausgehärteten Klebschichten bei Raumtemperatur 172
7-5 Materialparameter des reduzierten TAPO-Modells nach der Anpassung an die Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche mit ausgehärteten Klebschichten bei verschiedenen Temperaturen 173
7-6 Materialparameter des reduzierten TAPO-Modells nach Anpassung an Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche mit teilausgehärteten Klebschichten bei Raumtemperatur 176
7-7 Ergebnis der Identifikation der Materialparameter des TAPO-Kohäsivzonenmodells 179

A-1 Relaxationsspektrum des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells für die Normalbeanspruchung bei der Referenztemperatur $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$ A1
A-2 Relaxationsspektrum des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells für den Schub bei der Referenztemperatur $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$ A2

B-1 Identifizierte Pronyreihenparameter im Modus Scherung des EP1 . A8
B-2 Identifizierte Pronyreihenparameter im Modus Biegung des EP1 . . A8
B-3 Identifizierte Pronyreihenparameter im Modus Scherung des EP2 . A9
B-4 Identifizierte Pronyreihenparameter im Modus Biegung des EP2 . . A9

List of Tables

3-1 Technical data of the adhesive EP1 7
3-2 Technical data of the adhesive EP2 8
3-3 Technical data of the material S235JRG2C 8
3-4 Technical data of the material EN AW-5182 8
3-5 Technical data of the universal testing machine Zwick Z100 14
3-6 Technical data of MCR 501 16

4-1 Identified parameters for the relation of the glass transition temperature over the degree of cure for EP1 21
4-2 Identified parameters of the extended kamal model for EP1 24
4-3 Identified parameters of the extended kamal model for EP2 25
4-4 Identified degree of cure at the maximum loss factor of EP1 27
4-5 Identified WLF parameters in shear mode of EP1 34
4-6 Identified prony series parameters in bending mode of EP1 35
4-7 Identified WLF parameters in shear mode of EP2 38
4-8 Identified WLF parameters in bending mode of EP2 41
4-9 Identified parameters of the shift function according to Eom et al. for EP1 52
4-10 Identified parameters of the shift function according to Eom et al. for EP2 52

6-1 Rules for network forming [BM13a] 96
6-2 Ansatzes for the chemical shrinkage 101
6-3 Compilation of the constitutive equations of the viscoelastic cohesive zone model 120
6-4 Constitutive equations of the temperature and cure dependend Toughened-Adhesive-Polymer cohesive zone model 142

7-1 Material parameters of the time"=temperatur shift functions $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$ and $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$ 161
7-2 Material parameters of time-cure shift functions $a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}$ und $a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}$ 165
7-3 Material parameters of the TAPO cohesive zone model of the adaption to measurment data of double tube tests for single and multi axial loadings in [P9515a, S. 191, Tab. 7-4] 170
7-4 Material parameters of reduced TAPO model after adaption to measurement data of tests with thick adherend shear and butt joint specimen and cured adhesives at ambient temperature 172

7-5 Material parameters of reduced TAPO model after adaption to measurement data of tests with thick adherend shear and butt joint specimen and cured adhesives at different temperatures 173
7-6 Material parameters of reduced TAPO model after adaption to measurement data of tests with thick adherend shear and butt joint specimen and partially cured adhesives at ambient temperature 176
7-7 Result of identification of the material parameters of the TAPO cohesive zone model 179

A-1 Relaxation spectrum of the viscoelastic cohesive zone model for tensile loading at reference temperature $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$ A1
A-2 Relaxation spectrum of the viscoelastic cohesive zone model for shear loading at reference temperature $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$ A2

B-1 Identified prony series parameters in shear mode of EP1 . . . . . A8
B-2 Identified prony series parameters in bending mode of EP1 . . . . . A8
B-3 Identified prony series parameters in shear mode of EP2 . . . . . A9
B-4 Identified prony series parameters in bending mode of EP2 . . . . . A9

1 Einleitung
Introduction

Der Einsatz warmhärtender, einkomponentiger, zähmodifizierter Klebstoffe auf Epoxidharzbasis gehört zum Stand der Technik. Diese Klasse der strukturellen Klebstoffe werden weitgehend im automobilen Leichtbau eingesetzt. Während des Trocknungsprozesses der kathodischen Tauchlackierung treten Spannungen auf, die zu Schädigungen und zum Versagen in der hybridgefügten Struktur führen können. Das Ziel des Forschungsvorhabens ist die Entwicklung einer numerischen Berechnung- inklusive experimenteller Prüfmethode sowie analytischer Näherungslösung, welche die schadensrelevanten Beanspruchungen abbildet und so die Eignung von Klebstoffen für den KTL-Prozess vergleichend bewertbar macht.

The use of epoxy based thermosetting, one-component, toughened adhesives is state of the art. This class of structural adhesives is widely used in lightweight automotive design. During the E-Coat drying process, stresses occur which can lead to damage and failure of the hybrid bonded structure. The aim of the research project is the development of a numerical simulation method including experimental test methods as well as analytical approximation solution. These methods allow the comparative evaluation of the adhesives in the E-Coat drying process.

1.1 Problemstellung
Problem definition

Zur Senkung der CO_2-Emmissionen besteht der Bedarf nach leichteren Fahrzeugen und damit leichteren Bauteilen. Der strukturelle Leichtbau gilt deshalb im Rahmen neuer Fahrzeugentwicklungen neben der Entwicklung schadstoffarmer Motoren als Schlüssel zur aktuell geforderten Emissionsreduktion. Wirtschaftliche Leichtbaulösungen für die Großserie im Automobilbau werden durch das Multi-Material-Design erreicht, das aus dem Zusammenspiel von einzelnen Komponenten leichter Werkstoffe und deren fertigungs- sowie beanspruchungsgerechter Konstruktion und Dimensionierung im strukturellen Verbund entsteht. Im Zuge der Gewichtsreduktion werden neben Leichtmetallen und Verbundwerkstoffen hochfeste und ultrahochfeste Stähle eingesetzt. Ein wesentlicher Schlüssel zur Umsetzung dieser Mischbauweise, welche die genannten Materialien kombiniert, liegt in der Klebtechnik. Diese Technologie ist nahezu unabhängig von der Art der Fügeteilwerkstoffe und ist daher häufig die einzige Verbindungsmöglichkeit im Mischbau.
Im automobilen Karosseriebau werden häufig sogenannte strukturelle, einkomponentige Klebstoffe auf Epoxidharzbasis verwendet, welche unter hohen Temperaturen aushärten. Die Aushärtung der Strukturklebstoffe findet im Trocknungsprozess der kathodischen Tauchlackierung (KTL-Prozess) statt. Hierbei wird die Karosserie auf eine Temperatur von 180 °C erhitzt, wobei sich die Fügepartner der Mischbaustruktur, wie z. B.

Stahl und Aluminium, infolge der verschiedenen thermischen Ausdehnungskoeffizienten unterschiedlich stark ausdehnen. Im Anschluss kühlt die Karosserie wieder auf Raumtemperatur ab. Dadurch wirkt auf die Werk- und Klebstoffe des zu fügenden Bauteils bzw. der zu fügenden, aus einzelnen Bauteilen bestehenden, Struktur eine Temperaturwechselbeanspruchung. Diese Problemstellung der unterschiedlichen Bauteilausdehnungen wird als sogenannte $\Delta\alpha$-Problematik bezeichnet. Die thermischen Dehnungsunterschiede infolge der $\Delta\alpha$-Problematik induzieren eine Verschiebung auf die Klebschichten, welche die Verbindung bereits im Fertigungsprozess schädigen können oder gar zum Versagen führen.

1.2 Motivation
Motivation

Während des Warmaushärteprozesses von Klebschichten ändern sich die mechanischen Eigenschaften des Klebstoffes fortwährend in Abhängigkeit des Aushärtegrades, der Temperatur und der Zeit. Zusätzlich zu den im Belastungsprozess infolge der $\Delta\alpha$-Problematik induzierten Spannungen werden Klebstoffdeformationen infolge des aushärtungsbedingten Klebstoffschrumpfes sowie der temperaturabhängigen thermischen Dehnung hervorgerufen, welche zusätzliche Spannungen im Material hervorrufen. Um das Verhalten der Klebverbindung während der thermischen Härtung gezielt beeinflussen bzw. Strukturen geeignet auslegen zu können, muss zunächst der Grad der chemischen Vernetzung bekannt sein, welcher sich infolge des lokal unterschiedlichen Temperatur-Zeit-Profils einstellt. Im Allgemeinen ändern sich die mechanischen und rheologischen Eigenschaften des duroplastischen Werkstoffes. Dabei durchläuft das Klebstoffsystem ausgehend von einem niedrigviskosen, viskoelastischen Fluid über einen entropieelastischen Festkörper bis hin zu einem energieelastischen, glasartigen Festkörper verschiedene Phasenumwandlungen. Diese sind von der im Aushärteprozess veränderlichen Glasübergangstemperatur des Werkstoffes abhängig und beeinflussen das mechanische Klebschichtverhalten maßgeblich.
Während ein Totalversagen im Aushärteprozess direkt identifiziert werden kann, können lokale Schädigungen und Spannungen, welche die Betriebs- oder Crashbeanspruchbarkeit beeinflussen, weder direkt beobachtet werden, noch existieren geeignete zerstörungsfreie Prüfverfahren zur Quantifizierung eines solchen Effektes. Aus diesem Grund ist die numerische Simulation zur Beurteilung der im Fertigungsprozess auftretenden Effekte unerlässlich, um Handlungsempfehlungen zur optimierten Prozessgestaltung ableiten zu können.
Eine geeignete Berechnungs- inklusive experimenteller Prüfmethode jedoch, mit welcher die Plastizität und Schädigung des viskoelastischen Materials beschrieben werden kann, ist zum aktuellen Zeitpunkt nicht existent.

1.3 Zielsetzung
Objective

Ziel des Projektes ist die Entwicklung einer Berechnungs- und Bewertungsmethode, mit der die schadensrelevanten Beanspruchungen der Verbindung in Abhängigkeit von den materiellen, geometrischen und verfahrenstechnischen Einflussgrößen bestimmt werden können. Dazu soll sowohl eine numerische Berechnungsmethode als auch eine einfache Prüfmethodik mit dazugehöriger „Faustformel“ entwickelt werden, mit der die Eignung von Klebstoffen für den KTL-Prozess bei stahlintensiven Mischbaustrukturen vergleichend bewertbar ist. Die Verbesserung von materiellen, geometrischen und verfahrenstechnischen Größen führt zu einem optimalen Leichtbau. Durch die aufgezeigten Berechnungsmethoden und Optimierungsmöglichkeiten können Stahl-Anwender eine Schädigung der Klebverbindung durch Temperaturbelastungen und den hieraus bedingten Fügeteilrelativverschiebungen während des Härteprozesses vermeiden.

2 Stand der Technik
State of the art

In diesem Kapitel wird der für das Forschungsvorhaben relevante Stand der Technik aufgezeigt und herausgestellt, in wieweit sich das Forschungsvorhaben von dem bereits exisitierenden Arbeiten abgrenzt.

This chapter shows the state of the art relevant to the research project. It is emphasized to what extent the research project differs from the already existing work.

Die im strukturellen Leichtbau eingesetzten und mit Gummipartikeln modifizierten Strukturklebstoffe auf Epoxidharzbasis zeichnen sich durch eine hohe Duktilität bei annähernd gleichbleibender Steifigkeit und Festigkeit aus, s. [Hab09, S. 85 ff.]. Die Erhöhung der Duktilität geht jedoch mit irreversiblen plastischen Deformationen einher, sobald der Spannungszustand im Klebstoff aufgrund der Belastung die Fließgrenze überschreitet. In den abgeschlossenen FOSTA Forschungsprojekten [GM08] und [BM13b] sind die Grundsteine eines vom Institut für Mechanik der Universität Kassel (IfM Kassel) entwickelten Konstitutivmodells für duktil modifizierte Strukturklebstoffe gelegt worden – siehe auch [Bur15]. Im Rahmen der vorgenannten Arbeiten ist das sog. Toughened Adhesive Polymer (TAPO) Konstitutivmodell entwickelt worden, das mittlerweile in der Materialbibliothek der kommerziellen Finite Elemente (FE) Software LS-DYNA für die Anwendung in der numerischen Simulation bereitsteht – s. [LST15b, S. 2-1152 ff.]. Das TAPO-Modell ist für die Prognose des Versagens unter zügiger Beanspruchung bei Raumtemperatur im Rahmen der Crashanalyse entwickelt worden. Es beschreibt das elastoviskoplastische Materialverhalten duktil modifizierter Strukturklebstoffe bis zum Versagen mit einem Schädigungsmodell auf Basis der Kontinuumsschädigungsmechanik. In [Bur15] wird das TAPO-Modell im Sinne der Grenzflächentheorie reduziert, verifiziert und validiert.
Im Rahmen des FOSTA Projekts P 878 ist am IfM Kassel das Materialverhalten duktil modifizierter Strukturklebstoffe unter Betriebsbeanspruchung aufgrund von Temperaturänderungen auf Basis des in [Bur15] auf die Grenzfläche reduzierten TAPO-Modells mathematisch formuliert und als „user defined cohesive model“ in die FE Software LS-DYNA implementiert worden – s. [P8714, Kap. 6] und [KM14]. Dafür ist das TAPO-Modell um ein linear thermoviskoelastisches Modell vor sowie Thermoplastizität nach Erreichen der Fließgrenze erweitert worden. Eine empirische Temperaturfunktion in Anlehnung an [JC85] erweitert den Schädigungsansatz in [Bur15] um den Einfluss der Temperatur. Innerhalb des Projekts P 878 wird das temperaturabhängige TAPO Grenzflächenmodell an Messdaten aus Fließkurven angepasst, die vom Laboratorium für Werkstoff- und Fügetechnik (LWF) der Universität Paderborn in [P8714, Kap. Grundversuche an Klebverbindungen thermo-mechanisch (Kurzzeitbeanspruchung), S. 46 ff.] an Verbundproben aufgezeichnet worden sind. Des Weiteren kann das Konstitutivmodell in [P8714, Kap. 6] an den Fließkurven verifiziert und anhand von Messdaten aus Tests mit einer bimetallischen Verbundprobe (Bi-Metall-Probe) in [P8714, Kap. 9] teilweise validiert werden.

Im Rahmen der Validierung zeigt sich jedoch, dass die thermisch induzierte Beanspruchung der Klebschicht in der Bi-Metall-Probe nicht ausreicht, um alle Phänomene des Konstitutivmodells – wie Thermoplastizität und Schädigung – zu zeigen.

Das Institut für Mechanik der Universität der Bundeswehr München (IfM München) hat im Rahmen des Projekts P 878 ein Konstitutivmodell für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Strukturklebstoffen unter Fertigungsbeanspruchung entwickelt – s. [P8714, Kap. 5] und [Lie14, LJY12, LJYL12, LL11]. Dieses Konstitutivmodell ist ebenfalls mit einem thermo-viskoelastisch-plastischen Modellansatz formuliert und bildet neben der Temperaturabhängigkeit auch den Einfluss des chemischen Vernetzungsprozesses auf die mechanischen Eigenschaften des Klebstoffs ab. Zur Beschreibung der temperatur- und vernetzungsabhängigen Plastizität liegt diesem Modell das Plastizitätsmodell in [Mah05] zugrunde, das ebenfalls die Phänomenologie duktil modifizierter Strukturklebstoffe bei Raumtemperatur abbildet, jedoch keine Versagensprognose für die Klebverbindung ermöglicht. Die Entwicklung der chemischen Vernetzung in Abhängigkeit der Zeit und Temperatur wird mit dem Kinetikmodell nach Kamal und Sourour berücksichtigt – s. [KS73], [Kam74] – und fließt als akkumulierte Größe in die mechanischen Modellgleichungen ein. Die Materialgleichungen sind im Rahmen der Theorie kleiner Deformationen formuliert worden.

Im Schrifttum sind darüber hinaus weitere Arbeiten zu finden, welche die Eigenschaften von warmhärtenden Epoxidharzen beschreiben – s. bspw. [EBM$^+$00], [OMW01] und [MdBS$^+$04]. Die bekanntesten und viel zitierten Veröffentlichungen von Adolf und Mitautoren [AM90, AM96, AC97, ACC04, AC07] enthalten Ansätze zur Beschreibung des thermo-chemo-rheologischen Verhaltens von warmhärtenden Epoxidharzen und beziehen sich auf das Phänomen der linearen Viskoelastizität bei kleinen und großen Deformationen. Damit ist die Anwendbarkeit dieser Modelle deutlich beschränkt und in Hinblick auf die duktil modifizierten Strukturklebstoffe unzureichend, weil sowohl die Thermoplastizität als auch die Schädigung des Materials nicht in den Materialgleichungen berücksichtigt wird. Die Annahmen und Ansätze von Adolf und Martin in [AM90] und [AM96] werden von [Jen04] auf verschiedene Klebstoffe angewendet, wobei hier irreversible, plastische Deformationen sowie Schädigung ebenfalls nicht Gegenstand der Untersuchung sind. Dafür werden die Materialparameter in den Modellgleichungen nach Adolf und Martin von Jendrny anhand von Daten aus Versuchen mit Substanzproben verschiedener Klebstoffe identifiziert, jedoch nicht mit Messdaten aus Versuchen an Verbundproben verifiziert. Um die irreversiblen, plastischen Deformationen während des Vernetzungsprozesses unter Fertigungsbedingungen prognostizieren zu können, ist das thermo-chemo-rheologische Modell auf Basis der Arbeit von [AM96] von der Fa. P+Z Engineering GmbH (P+Z) um einen Plastizitätsansatz erweitert und in die kommerzielle FE Software Abaqus implementiert worden. [Men11] verwendet das Konstitutivmodell von P+Z für die Berechnung von Klebverbindungen mit einem duktil modifizierten Strukturklebstoff unter den üblichen thermischen Randbedingungen des Lacktrocknungsprozesses bei der kathodischen Tauchlackierung (KTL) von Fahrzeugkarosserien. Im Zuge der Verifikation des Konstitutivmodells mit Grundversuchen an stumpf geklebten Doppelrohrproben zeigt Menzel, dass die einfachen Annahmen nach Adolf und Martin zur Beschreibung des chemorheologischen Verhaltens unter quasistatisch

zügigen Verschiebungsrandbedingungen offenbar nicht auf die Klasse der Strukturklebstoffe anwendbar sind.
In der Arbeit von [Hos10] sowie den Arbeiten von [HPS09b, HPS09a, HPS10] wird sich der Problematik der Temperatur- und Aushärtegradabhängigkeit des mechanischen Materialverhaltens von Polymeren grundsätzlich über die Zeitabhängigkeit der phänomenologischen Gleichungen genähert, ohne die Temperatur und den Aushärtegrad explizit als Größen in den Materialgleichungen zu berücksichtigen. In den Dissertationen von [Yag13] und [Lan15] werden Konstitutivmodelle zur Beschreibung des thermo-chemo-rheologischen Verhaltens von Polymeren vorgestellt, deren Ansätze sich zum Teil von den vereinfachenden Annahmen nach Adolf und Martin unterscheiden. Der Fokus dieser Arbeiten liegt auf der Beschreibung des thermo-chemo-rheologischen Verhaltens von Polymeren im Rahmen der Visko-Hyperelastizitätstheorie für große Deformationen, wobei plastische Deformationen und Schädigung nicht in Betracht gezogen werden.
Innerhalb der genannten Veröffentlichungen werden weiterhin zahlreiche Arbeiten zitiert, die sich mit den Auswirkungen des chemischen Vernetzungsprozesses auf die mechanischen Eigenschaften polymerer Werkstoffe auseinandersetzen. Dennoch bleibt die Problematik der Versagensprognose für Klebverbindungen mit thermisch vernetzenden Strukturklebstoffen unter Fertigungsbeanspruchungen in hybridgefügten Strukturen ungelöst.

6 Materialmodell für den Fertigungsprozess Material model for the manufacturing process

Patrick Kühlmeyer, Anton Matzenmiller

Im folgenden Kapitel wird das Materialmodell für die Simulation des Fertigungsprozesses von Klebverbindungen während der Warmaushärtung vorgestellt. Es dient der Prognose des mechanischen Verhaltens von Klebverbindungen mit duktil modifizierten Strukturklebstoffen in metallischen Mischbaustrukturen unter Einfluss beliebiger Zeit-Temperatur-Verläufe. Das Materialmodell berücksichtigt den Einfluss des Vernetzungsfortschritts des warmhärtenden Klebstoffs auf Epoxidharzbasis in den Materialgleichungen für die Beschreibung der zeitabhängigen Spannung unterhalb und die Entwicklung irreversibler Deformationen oberhalb der Fließgrenze. Ein Schädigungsmodell für duktile Schädigung infolge zügiger Belastung berücksichtigt die Degradation der Steifigkeit von Strukturklebstoffen unter Einfluss der Temperatur und des Aushärtegrads bis zum Versagen.

The following chapter introduces the material model for the simulation of the manufacturing processes of adhesively bonded structures during heat-curing. The modell predicts the mechanical behaviour of ductile modified adhesives in bimetallic structures under arbitrary time-temperature courses. The temperature and the degree of cure are considered in the equations for the time dependend stress below and the irreversible deformations beyond the yield theshold. A ductile damage approach discribes the stiffness degradation of structural adhesives until fracture with respect to temperature and the degree of cure.

6.1 Problembeschreibung Problem description

Im Rahmen des vorliegenden FOSTA Projekts P 1087 wird das mechanische Verhalten von warmaushärtenden, duktil modifizierten Strukturklebstoffen in hybriden Fügeverbindungen unter Fertigungsbeanspruchung vom IfM Kassel auf der Basis des temperaturabhängigen TAPO-Modells in [P8714, Kap. 6] phänomenologisch beschrieben. In die Entwicklung des Konstitutivmodells fließen dabei sowohl die Ergebnisse und Erkenntnisse des laufenden Projekts als auch des Vorgängerprojekts P 878 ein. Ziel der Arbeit ist die Prognose des mechanischen Verhaltens metallischer Klebverbindungen mit duktil modifizierten Strukturklebstoffen während der thermisch induzierten, chemischen Vernetzung des Klebstoffs bis zum Versagen mittels der Finite Elemente Methode mit einem eigens entwickelten Konstitutivmodell. Dafür werden die folgend beschriebenen Modellierungsschritte und Methoden verwendet.
Beim vorliegenden thermisch vernetzenden Strukturklebstoff beginnt die chemische Vernetzungsreaktion (Aushärtung) durch Zuführung von Wärme erst, wenn eine ma-

terialspezifische Energiebarriere überschritten wird. Nach Überschreiten der Energiebarriere läuft die Vernetzungsreaktion des Klebstoffs autokatalytisch und exotherm ab, jedoch erhöht sich die Energiebarriere mit fortschreitender Vernetzung. Daher muss die zugeführte Wärme stets höher als die Energiebarriere sein. Somit wird die chemische Reaktion im Klebstoff vom Temperatur-Zeitverlauf beeinflusst, der auf die Struktur einwirkt. Die Energiebarriere wird häufig auf die Glasübergangstemperatur reduziert – s. bspw. [AM96] und [AC97]. Zur Beschreibung der Glasübergangstemperatur als Funktion des Vernetzungsfortschritts sind im Schrifttum verschiedene Ansätze zu finden. Jedoch hat sich bei der betrachteten Klebstoffklasse der Ansatz nach [HBP98] bewährt und wird bei der Entwicklung des Konstitutivmodells verwendet.

Die Größe zur Abbildung des Fortschritts der Vernetzungsreaktion ist der Aushärtegrad, der Werte zwischen Null (unvernetzt) und Eins (vollständig vernetzt) annimmt. Die Entwicklung des Aushärtgrads wird im Schrifttum häufig mit dem Kinetikmodell nach Kamal und Sourour beschrieben, das eine nichtlineare Evolutionsgleichung in Abhängigkeit des Zeit-Temperaturverlaufs ist – s. [KS73] und [Kam74]. Der Aushärtegrad beeinflusst das mechanische Verhalten der Klebverbindung, indem er als Größe in die thermoviskoelastischen und thermoplastischen Modellgleichungen sowie in das Schädigungsmodell einfließt.

Im thermoviskoelastischen Teilmodell wird der Einfluss der Temperatur über die Verschiebung der Relaxationszeiten im Sinne der thermorheologischen Einfachheit berücksichtigt – s. [Sch90, S. 202 ff.]. Der Einfluss des Aushärtegrads auf die viskoelastischen Materialeigenschaften zeigt einen ähnlichen Effekt. Für die Modellbildung stehen im Schrifttum verschiedene Methoden zur Verfügung, wobei die Einfachste auf die Arbeiten von [AM96] und [AC97] zurückgeht und als „chemorheologisch einfach“ bezeichnet wird. Die Idee der chemorheologischen Einfachheit geht davon aus, dass sich der Aushärtegrad nur auf die Relaxationszeiten des viskoelastischen Materials auswirkt. Nach [AC97] beeinflusst der Aushärtegrad die Relaxationszeiten des thermoviskoelastischen Modells indirekt über die Zeit-Temperaturverschiebungsfunktion mit der Glasübergangstemperatur als Funktion des Aushärtegrads, die wiederum als Referenztemperatur in die Zeit-Temperaturverschiebungsfunktion eingeht. In der geplanten Arbeit wird für die Zeit-Temperaturverschiebungsfunktion unterhalb der Glasübergangstemperatur ein Ansatz nach Arrhenius und oberhalb die Gleichung nach Williams, Landel und Ferry [Wil55, WLF55] verwendet. Anhand von Messdaten aus Grundversuchen wird untersucht, ob die einfache Annahme von Adolf und Martin auf Strukturklebstoffe anwendbar ist, um ggf. andere Ansätze in Betracht zu ziehen. Alternative Ansätze im Schrifttum bilden die Abhängigkeit der Relaxationszeiten vom Aushärtegrad mit einer eigenen Zeit-Aushärtegradverschiebungsfunktion ab – s. bspw. [Lie14, EBM$^+$00, Lan15, Yag13]. Während des Vernetzungsprozesses passiert der Klebstoff die Gellinie, an der das Material zu gelieren beginnt und aus mechanischer Sicht von einem viskoelastischen Fluid in einen viskoelastischen Festkörper übergeht. Das Festkörperverhalten zeichnet sich dadurch aus, dass das Material bei gleichbleibender Deformation gegen einen mechanischen Gleichgewichtszustand relaxiert, der ungleich von Null ist. Dies ist gleichbedeutend mit dem Aufbau eines Gleichgewichtsmoduls, der nach überschreiten der Gellinie bzw. des dazugehörigen Aushärtegrads (Gelpunkt) eine Funktion des Aushärtegrads ist. Im Konstitutivmodell wird dieses Phänomen mit einem Ansatz nach [AM90] berücksichtigt –

siehe auch [AM96].

Im thermoplastischen Teilmodell wirkt sich die chemische Vernetzung auf den Fließbeginn des Klebstoffs derart aus, dass sich die Anfangsfließspannung mit steigendem Aushärtegrad erhöht. Der Zusammenhang zwischen der Anfangsfließspannung und dem Aushärtegrad wird mithilfe einer empirischen Funktion im Konstitutivmodell berücksichtigt, die an Daten einer Fließkurvenschar aus Tests mit teilausgehärteten Grundproben identifiziert wird. Mit der gleichen Methode wird die Abhängigkeit der nichtlinearen Verfestigungsspannung vom Aushärtegrad mathematisch beschrieben. Ausgangspunkt für die Modellbildung ist das temperaturabhängige TAPO-Plastizitätsmodell in [P8714, Kap. 6].

Die mathematische Beschreibung der Schädigungsentwicklung erfolgt auf Basis der Kontinuumsschädigungsmechanik mit der Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable aus [Bur15]. In [P8714, Kap. 6] wird der Ansatz zur Berücksichtigung des Beanspruchungszustands nach [JC85] um den Einfluss der Temperatur erweitert und in der vorliegenden Arbeit mit einer Funktion in Abhängigkeit des Aushärtegrads ergänzt, um den Einfluss der chemischen Vernetzungsreaktion auf die Schädigungsentwicklung im Konstitutivmodell zu berücksichtigen. Die Messdaten der bereits erwähnten Fließkurvenschar an Grundproben dienen der Identifikation der aushärtegradabhängigen Funktion im Schädigungsmodell.

Die zuvor beschriebenen Modellgleichungen werden für die numerische Simulation geklebter Strukturen in die kommerzielle FE Software LS-DYNA implementiert. Dafür werden die Modellgleichungen zeitlich diskretisiert und mit impliziten Verfahren numerisch integriert. Das entstehende diskrete Algebro-Differentialgleichungssystem wird in eine FORTRAN Routine implementiert und innerhalb des FE-Programms in Form eines benutzerdefinierten Konstitutivmodells numerisch gelöst. Da sich der Fertigungsprozess geklebter Strukturen mit warmhärtenden Strukturklebstoffen über einen langen Zeitraum erstreckt, ist es für eine zeitlich effiziente Berechnung notwendig, das Konstitutivmodell für die quasistatische FE-Berechnung zu implementieren. Dafür muss der konsistente Tangentenmodul aus den linearisierten Modellgleichungen hergeleitet und in der FORTRAN Routine des benutzerdefinierten Konstitutivmodells bereitgestellt werden.

Nach der Implementierung des Konstitutivmodells in die FE Software LS-DYNA werden die Materialparameter der Modellgleichungen an den Messdaten verschiedener Tests mit Grundproben identifiziert, die vom Projektpartner (LWF) bereitgestellt werden. Danach werden die Modellgleichungen mittels FE-Rechnungen der verschiedenen Tests an den Grundproben durch Vergleich der Simulationsdaten mit den Testdaten verifiziert. Für die Validierung der Prognosefähigkeit des Konstitutivmodells werden FE-Rechnungen bauteilnaher Proben unter den üblichen Fertigungsrandbedingungen hybrider Fügeverbindungen durchgeführt. Dafür werden die Daten aus der Simulation den Versuchsdaten aus den Tests mit den bauteilnahen Proben gegenübergestellt und kritisch diskutiert.

6.2 Vernetzungskinetik und physikalische Eigenschaften Cure kinetics and physical properties

In der vorliegenden Arbeit wird das thermomechanische Verhalten von Klebverbindungen untersucht, die mithilfe warmhärtender, einkomponentiger, duktil modifizierter Strukturklebstoffe auf Epoxidharzbasis hergestellt werden. Der Strukturklebstoff *EP 1* wird im Rahmen der Arbeit stellvertretend für die o. g. Klasse der Strukturklebstoffe untersucht. Die Epoxidharzmatrix des Klebstoffs *EP 1* wird mittels Kautschukpartikeln duktil modifiziert. Dabei wird die Epoxidharzmatrix durch gummielastische Partikel – z. B. Carboxylterminierter Butadien-Nitril-Kautschuk – mit wenigen Mikrometern Durchmesser über kovalente Bindungen elastifiziert, d. h. durch chemische Reaktion und nicht durch physikalisches Einmischen – s. [Hab09, S. 86] und [SS08]. Dieses Verfahren der Duktilmodifizierung hat laut [Hab09] einen geringfügigen Einfluss auf die Glasübergangstemperatur und den Schubmodul des Strukturklebstoffs. Vielmehr ist hier von Vorteil, dass sich die physikalischen Eigenschaften des Duromers und Elastomers positiv auf die Gesamteigenschaften des Strukturklebstoffs auswirken. Dies zeigt sich in der Verbesserung der Dehnungs- und Gleitungseigenschaften ohne Verringerung der Festigkeit. Der Betrachtete Klebstoff *EP 1* ist ein chemisch vernetzender (abbindender) Klebstoff, der zur Klasse der Polyadditionsklebstoffe zählt – s. [Hab09, S. 73]. Vor der Vernetzung der Ausgangsmonomere zum Polymer ist das Epoxidharz aus mechanischer Sicht als Fluid anzusehen. Das Epoxidharz im Strukturklebstoff wird in Form einer Polyaddition durch Anlagerung verschiedener reaktiver Monomermoleküle an die Epoxidgruppe vernetzt – s. [Hab09, S. 73 f]. Da das vorliegende Epoxidharz warmaushärtend ist, wird die Vernetzungsreaktion nach überschreiten einer Energiebarriere infolge der Zuführung thermischer Energie in Form von Wärme in Gang gesetzt. Danach verläuft die Reaktion beim vorliegenden Strukturklebstoff *EP 1* autokatalytisch und exotherm ab. Aufgrund dessen wird als Größe für den Reaktionsfortschritt häufig der Aushärtegrad p verwendet, der mithilfe der Wärme, die während der chemischen Vernetzung entsteht, definiert wird.

6.2.1 Der Aushärtegrad als Größe für den Reaktionsfortschritt Degree of cure as the quantity for the extend of reaction

Als Größe zur Beschreibung komplizierter chemischer Reaktionen wird statt der Konzentrationen der Reaktanden häufig der Aushärtegrad $p(t)$ verwendet. Er wird mithilfe des Wärmestroms $\dot{Q}(t)$ definiert, der während der exothermen Vernetzungsreaktion des Klebstoffs in der Zeit t gemessen wird. Für die Messung wird die Dynamischen Differenzkalorimetrie (DDK) verwendet, bei der an einem symmetrischen Messsystem der Temperaturunterschied zwischen einem Tiegel mit der Klebstoffprobe und einem Referenztiegel – der oftmals leer ist – gemessen wird – s. [HHF03] und 3.3.4. Die Entwicklung des Aushärtegrads $\dot{p}$ ist proportional zum Wärmestrom $\dot{Q}$ mit

$$\dot{p}(t) = \frac{\dot{Q}(t)}{Q_\infty} \tag{6-1}$$

und der Gesamtwärme Q_∞, die während des Vernetzungsprozesses bis zur vollständigen Aushärtung des Klebstoffs entsteht.

Für die Beschreibung der Evolution des Aushärtegrads $\dot{p}$ werden je nach Klebstoff verschiedene Modellgleichungen angesetzt, die entweder mechanistisch oder empirisch motiviert sind. Die zeitliche Entwicklung des Aushärtegrads $\dot{p}(t)$ muss stets größer Null sein, da der chemische Vernetzungsprozess irreversibel ist. Daher wird die Evolution des Aushärtegrads als Funktion der absoluten Temperatur $\theta \geq 0$ mit

$$\dot{p} = \dot{\tilde{p}}\,(\theta(t)) \geq 0 \tag{6-2}$$

in Abhängigkeit des Zeit-Temperaturverlaufs $\theta(t)$ definiert, der bei warmaushärtenden Klebstoffsystemen die maßgebliche Größe für das Voranschreiten des chemischen Vernetzungsprozesses ist.

In [HM96] ist eine Zusammenstellung einfacher empirischer Modelle zur Beschreibung der Evolution des Aushärtegrads in Epoxidharz und Polyester zu finden.

Im Folgenden wird eine kleine Auswahl an Modellen gezeigt, die z. T. auch in Veröffentlichungen zur Modellierung von Klebstoffen auf Epoxidharzbasis verwendet worden sind. In [PRN66] wird das einfache Kinetikmodell

$$\dot{p} = A(\theta)\,(1-p)^n \tag{6-3}$$

mit dem Materialparameter n vorgestellt, dass der Beschreibung von Reaktionen n-ter Ordnung dient. Für den in dieser Arbeit untersuchten Strukturklebstoff *EP 1* wird in [Men11] der Ansatz

$$\dot{p} = A(\theta)\,(1-k_{\mathrm{cat}}\,p)\,(1-p)^n \tag{6-4}$$

mit den Materialparametern k_{cat} und n zur Beschreibung von Vernetzungsreaktionen n-ter Ordnung mit Autokatalyse verwendet. In [PRN66] wird auch das Modell

$$\dot{p} = A(\theta)\,p^m\,(1-p)^n \tag{6-5}$$

mit den Materialparametern n und m für Reaktionen n-ter Ordnung mit Autokatalyse vorgestellt, dass bspw. zur Beschreibung der Aushärtekinetik eines Dichtklebstoffs auf Epoxidharz- und Polyurethanbasis in [HJM04] verwendet wird. In den Modellen (6-3) bis (6-5) ist $A(\theta)$ der ARRHENIUS-Ansatz für den Geschwindigkeitskoeffizienten

$$A(\theta) = A_0 \exp\left(-\frac{E_A}{R\,\theta}\right) \tag{6-6}$$

in Abhängigkeit der Temperatur θ mit dem präexponentieller Faktor A_0, der Aktivierungsenergie E_{A} und der universellen Gaskonstanten R beschrieben wird. Das bekannte und häufig verwendete KAMAL-SOUROUR-Modell

$$\dot{p} = (A_1(\theta) + A_2(\theta)\,p^m)\,(1-p)^n \tag{6-7}$$

zur Beschreibung der Aushärtekinetik von Vernetzungsreaktionen mit Autokatalyse wird in [Kam74] vorgestellt. Dieses Kinetikmodell ist in [P8714] bzw. [Lie14] erfolgreich für die Aushärtekinetik des in dieser Arbeit untersuchten Klebstoffs *EP 1* verwendet worden und dient bspw. in [LIK+15] der Beschreibung der Vernetzungskinetik eines acrylischen

Knochenzements. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird vom LWF das Modell

$$\dot{p} = A_1(\theta)\,(1-p)^{n_1} + A_2(\theta)\,(1-p)^{n_2}\,p^m \tag{6-8}$$

mit den Geschwindigkeitskoeffizienten nach ARRHENIUS

$$A_i(\theta) = A_{i0}\exp\left(-\frac{E_i}{R\,\theta}\right) \qquad \text{für} \qquad i = 1,2 \tag{6-9}$$

als Erweiterung des Modells nach [Kam74] vorgeschlagen – 4.1. Die Validierung des Modells an Proben des vorliegenden Klebstoffs *EP 1* zeigt, dass die Entwicklung des Aushärtegrads unter beliebigen Zeit-Temperaturprofilen mit dem Kinetikmodell (6-8) deutlich besser prognostiziert werden kann – 4.1.
Im Konstitutivmodell des IfM wird der Ansatz

$$\dot{p} = A_1(\theta)\,(1-k_{\text{cat}}\,p)\,(1-p)^{n_1} + A_2(\theta)\,(1-p)^{n_2}\,p^m \tag{6-10}$$

verwendet, der alle zuvor aufgeführten Kinetikmodelle enthält. Durch geschickte Wahl der Materialparameter kann zwischen den aufgeführten Entwicklungsgleichung gewählt werden. Die KAMAL-SOUROUR-Gleichung (6-7) entsteht bspw. aus der Entwicklungsgleichung (6-10) für $k_{\text{cat}} = 0$ und $n_1 = n_2$.

6.2.2 Phasen und Phasenübergänge des Strukturklebstoffs
Phases and phase transitions of the structural adhesive

Während der Aushärtung zeigt der Strukturklebstoff *EP 1* verschiedene physikalische Eigenschaften, die mithilfe des Zeit-Temperatur-Umwandlungsdiagramms nach [EG83b] (ZTU-Diagramm) in Abb. 6-1 motiviert werden[1]. Das ZTU-Diagramm 6-1 stellt die Phasen und Phasenübergänge reiner Epoxidharze für isotherme Reaktionen bei einer festen Temperatur θ über der Zeit t schematisch dar. Für Epoxidharze (Duromere) werden je nach Reaktionsfortschritt folgende Zustände definiert:

- flüssiger Zustand
- unvernetzer Glaszustand
- vernetzter Glaszustand
- gummielastischer Zustand
- Zersetzung

[1] Anm.: Das Phasendiagramm nach [EG83b] dient beim vorliegenden Klebstoff *EP 1* lediglich der Veranschaulichung der Phasenübergänge. Jedoch muss an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass die qualitativen Verläufe der Phasen nicht uneingeschränkt denen eines duktil modifizierten Klebstoffs auf Epoxidharzbasis entsprechen können. Die Duktilmodifizierung der Epoxidharzmatrix mit Gummipartikeln hat im allgemeinen einen Einfluss auf die physikalischen Eigenschaften, da die Gummipartikel selbst Phasenübergänge aufweisen, die sich im mechanischen Verhalten des Klebstoffs widerspiegeln – wenn auch nicht derart ausgeprägt wie beim Epoxidharz.

Der Klebstoff befindet sich oberhalb der Glasübergangstemperatur des unvernetzten Polymers θ_{g0} zunächst in der flüssigen Phase, da er hier als Monomerlösung vorliegt. Der Zustand der Monomerlösung unterhalb der Glasübergangstemperatur θ_{g0} wird als unvernetzer Glaszustand bezeichnet. Bei Temperaturen θ zwischen θ_{g0} und der Glasübergangstemperatur des vollständig vernetzten Polymers $\theta_{g\infty}$ finden mit der Zeit t die chemische Reaktion zwischen den Reaktanden statt, bei der die Bildung und Vernetzung des Polymers simultan ablaufen. Ab einem bestimmten Vernetzungsgrad beginnt der Klebstoff zu gelieren, was auf die Bildung eines ersten substanzübergreifenden „infiniten“[2] Polymernetzwerks zurückzuführen ist – s. [SCA82, S. 106]. Entlang der Gellinie im ZTU-Diagramm 6-1 geht der Klebstoff vom flüssigen in den gummielastischen Zustand über, wenn die Temperatur θ oberhalb der Gelierungstemperatur θ_{gel} liegt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden lediglich Prozessgrößen betrachtet, bei denen der unvernetzte Glaszustand ausgeschlossen werden kann, da die Temperatur θ zu keiner Zeit unterhalb von θ_{g0} bzw. θ_{gel} liegt.
Eine weitere Phasenumwandlung zeigt sich beim Übergang des gummielastischen Klebstoffs in den vernetzten Glaszustand. Dieser Phasenübergang zwischen gummielastischem und Glaszustand wird als Glasübergang bezeichnet und ist in der Regel keine harte Grenze, sondern erstreckt sich entlang eines begrenzten Übergangsbereichs.

Im Rahmen der Modellbildung werden Prozessgrößen ausgeschlossen, die die Zersetzung des Klebstoffs zur Folge haben[3]. Damit wird der Übergang vom gummielastischen Zustand in den Zersetzungsbereich ausgeschlossen. Zusammenfassend muss bei der

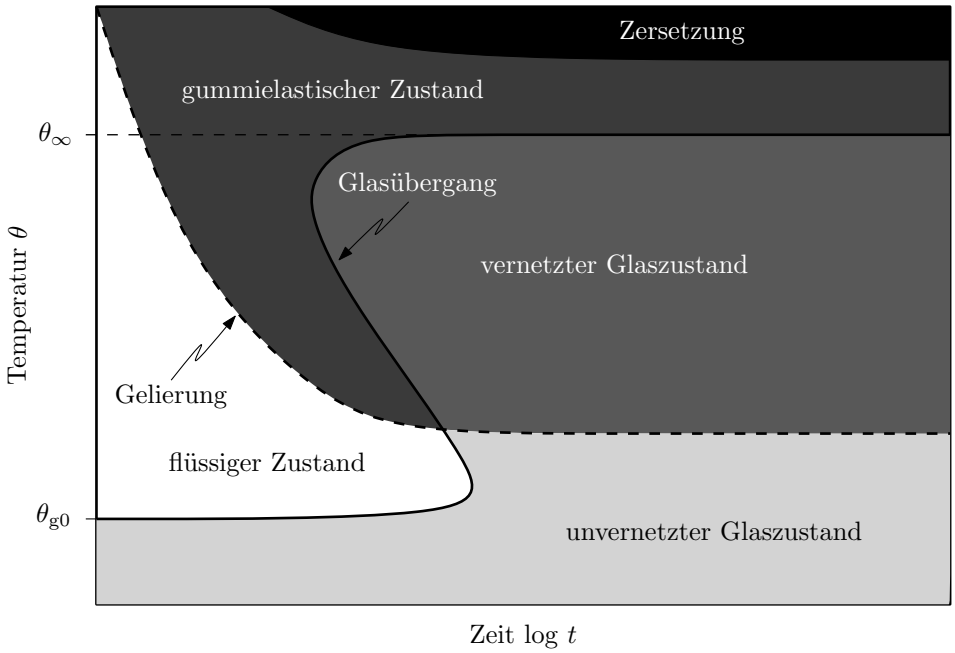


Abbildung 6-1: Zeit-Temperatur Phasendiagramm nach [EG83b]
Figure 6-1: Time-temperature transition diagram following [EG83b]

[2] Der Begriff des infiniten Netzwerks bezieht sich gemäß [Flo53, S. 47] auf das molekulare Gewicht der als unbegrenzt groß anzusehenden makromolekularen Struktur, dass demnach in seiner Größe als infinit berücksichtigt werden müsste.
[3] Die Klebstoffhersteller geben den Zeit-Temperaturverlauf für die Aushärtung des Klebstoffs in der Regel vor, so dass die Zersetzung des Polymers ausgeschlossen werden kann.

Modellbildung berücksichtigt werden, dass während des Aushärteprozesses vom flüssigen Zustand in den vernetzten Glaszustand zwei Phasengrenzen überschritten werden, die Gellinie (Gelpunkt) und der Glasübergang – vgl. Abb. 6-1.

Gelierung – Gelpunkt Im ZTU-Diagramm Abb. 6-1 zeigt sich der Übergang von der flüssigen zur festen Phase (gummielastischer Zustand) in Form einer Linie. In der Literatur wird diese Phasengrenze als Gelpunkt bezeichnet, da in Abhängigkeit der Zeit und Temperatur ein kritischer Reaktionsumsatz mit der Umsatzvariable[4] ζ_c am Phasenübergang vorliegt – s. [Win04, S. 135]. Um den Reaktionsfortschritt komplizierter chemischer Reaktionen zu bestimmen, wird statt der Umsatzvariable ζ häufig der Aushärtegrad p verwendet, der in Kapitel 6.2.1 eingeführt und beschrieben wird. Der Gelpunkt wird dann mit dem Aushärtegrad p_{gel} abgebildet, der beim jeweils vorliegenden Zeit-Temperaturverlauf bis zur Gelierung mithilfe eines Kinetikmodells – beim vorliegenden Klebstoff *EP 1* mit dem Kinetikmodell (6-8) – berechnet wird. Da das überschreiten des Gelpunkts aufgrund des chemischen Vernetzungsprozesses im Polymer durch den Aufbau kovalenter Bindungen geschieht und die Vernetzungsreaktion in Abhängigkeit des Zeit-Temperaturverlaufs $\theta(t)$ stetig voranschreitet, ist der Phasenübergang am Gelpunkt irreversibel. Das wird im Konstitutivmodell mit der Forderung (6-2) garantiert, in der die Evolution des Aushärtegrads $\dot{p}$ stets positiv ist.
Am Gelpunkt zeigt der Klebstoff charakteristische mechanische Eigenschaften. Wenn sich der Aushärtegrad des Klebstoffs von unten dem Gelpunkt nähert, nimmt die Viskosität des Klebstoffs stetig zu, bis sie am Gelpunkt ad infinitum geht. Am Gelpunkt hat der Klebstoff noch keinen Gleichgewichtsmodul, da er sich nach Erreichen des Gelpunkts mit voranschreiten des Aushärtegrads p aufbaut. Der Aufbau des Gleichgewichtsmoduls aufgrund der Evolution des Aushärtegrads geht also mit dem Übergang des Klebstoff von der flüssigen in die feste Phase einher – [Win04, S. 133]. Da der Klebstoff unterhalb des Gelpunkts flüssig ist, relaxieren die Spannungen unter konstanter Deformation über der Zeit asymptotisch gegen Null. Dagegen relaxieren die Spannungen im Klebstoff bei konstanter Deformation oberhalb des Gelpunkts nicht vollständig, sondern nähern sich asymptotisch der Gleichgewichtsspannung, die proportional zum Gleichgewichtsmodul ist. Beim vorliegenden Klebstoff ist plastisches Fließen nach überschreiten der Anfangsfließspannung nur oberhalb des Gelpunkts möglich, da die Epoxidharzmatrix dann erst die Festkörpereigenschaften aufweist. Das Phänomen der irreversiblen Deformation in duktil modifizierten Strukturklebstoffen entsteht aufgrund von Mikrorissen, Porenbildung und Kavitation in der mit Gummipartikeln modifizierten Epoxidharzmatrix – s. Kapitel 6.6.
Für die Messung des Gelpunkts werden im Schrifttum verschiedene Messmethoden verwendet, die auf die Veränderung der mechanischen Eigenschaften nach Überschreiten des Gelpunkts abzielen. Die Folgenden Methoden beziehen sich auf Messungen am Rheometer:

- Maximum des Verlustwinkels $\tan\delta$
- Maximum der stationären Scherviskosität η
- Schnittpunkt des Speicher- und Verlustmoduls $G' = G''$

[4] veraltet auch „Reaktionslaufzahl“ genannt

Während der Messung der oben angegebenen Größen wird der Klebstoff unter bestimmten Zeit-Temperaturprofilen ausgehärtet. Mithilfe der Zeit-Temperaturprofile wird mit dem Kinetikmodell (6-8) der Aushärtegrad $p(\theta(t_{\mathrm{gel}})) =: p_{\mathrm{gel}}$ aus der Evolutionsgleichung berechnet, der am Zeitpunkt t_{gel} der Beobachtung der oben aufgelisteten Phänomene vorliegt – 4.1.4. Da der Gelpunkt bei dieser Vorgehensweise über das Kinetikmodell bestimmt werden muss, unterliegt der ermittelte Wert einer nicht zu vermeidenden Modellungenauigkeit. Daher ergeben sich unter anderem in Abhängigkeit der Randbedingungen bei den Messungen leichte Unterschiede in den jeweils bestimmten Werten für den Gelpunkt p_{gel} – 4-4.

Glasübergangstemperatur Am Glasübergang ändern sich die physikalischen Eigenschaften vernetzter amorpher Polymere erneut, da sie hier vom gummiartigen[5] (entropieelastischen) in den glasartigen (energieelastischen) Zustand[6] übergehen. Der Übergangsbereich zwischen den Phasen wird als Erweichungsbereich bezeichnet, da er sich über mehrere Zehnerpotenzen (sechs bis acht) entlang der Zeitachse t erstrecken kann – [Sch90, S. 150 ff. und Abb. 8.15]. Der instantane (spontane) Modul bzw. Glasmodul des Polymers kann dabei um das 100 bis 10000 fache des Gleichgewichtsmoduls anwachsen. Im Fall des Strukturklebstoffs *EP 1* wird die Epoxidharzmatrix im vernetzten Glaszustand steif und spröde und die Festigkeit nimmt erheblich zu. Aufgrund der Duktilmodifizierung mit Gummipartikeln zeigt der Klebstoff *EP 1* im vernetzten Glaszustand ein ausgeprägtes plastisches Fließverhalten, das nach der Erreichen Fließgrenze beginnt und sich bis zur Zugfestigkeit erstreckt.
Im Glasübergangsbereich ist darüber hinaus bei amorphen Polymeren zu beobachten, dass sich das spezifische Volumen $v = V/m = 1/\rho$ mit der Temperatur θ ändert. Erfahrungsgemäß ist die Volumenausdehnung amorpher Polymere[7] oberhalb der Glasübergangstemperatur etwa dreimal so hoch wie unterhalb – s. [Sch90, S. 110] und vgl. Kapitel 6.3.3.
Zur Bestimmung der Glasübergangstemperatur existieren verschiedene Methoden bzgl. einiger physikalischer Kenngrößen, wie z. B. Speichermodul, Relaxations- und Kriechfunktion oder Wärmeausdehnungskoeffizient, die eine Temperatur- und Zeit- bzw. Frequenzabhängigkeit des Glasübergangsbereichs zeigen. Durch Variation der Prozessgrößen Temperatur und Zeit bzw. Temperatur und Frequenz in Kriech-, Relaxations- bzw. DMA-Versuchen oder unter verschiedenen Abkühl- bzw. Aufheizraten $\dot{\theta}$ in Versuchen auf Basis der Wärmeausdehnung zeigt sich die Verschiebung des Glasübergangsbereich deutlich – s. [Sch90, S. 110]. Des Weiteren zeigt das ZTU-Diagramm 6-1, dass der Glasübergang auch vom Fortschritt der chemischen Vernetzung des Klebstoffs ab-

[5] Der Begriff „Gummi“ wird hier stellvertretend für den gummiartigen Zustand des Materials verwendet und nicht als Bezeichnung für die chemische Substanz – s. a. [vT67, S. 33]. In ähnlicher Weise verhält es sich mit dem Begriff „Glas“, der i. Allgem. ein Sammelbegriff für alle amorphen Feststoffe ist und hier synonym für den Zustand des Materials verwendet wird.

[6] In der Mechanik ist die Bezeichnungen der Energieelastizität geläufig für Metalle oder auch Gläser (an- und organische) und der Begriff Entropieelastizität für gummiartige Materialien – s. [Hol00, S. 309 ff.].

[7] Da die Epoxidharzmatrix und die Gummipartikel zur Klasse der amorphen Polymere gehören, ist dieses Phänomen ebenfalls bei Strukturklebstoffen zu beobachten. Es muss jedoch an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass die Gummipartikel selbst einen Glasübergang aufweisen, der sich von dem der Epoxidharzmatrix deutlich unterscheidet.

hängt. Daher ist eine adäquate Beschreibung der Glasübergangstemperatur als Funktion des Aushärtegrads für notwendig. In [Nie69] ist ein Zusammenhang zwischen der Glasübergangstemperatur und dem Aushärtegrad beschrieben, der auf DIBENEDETTO zurückgeht. In den zurückliegenden Arbeiten [Men11] und [P8714] zum vorliegenden Strukturklebstoff *EP 1* wird für die Glasübergangstemperatur der Ansatz nach [HBP98]

$$\theta_{\mathrm{g}} = \theta_{\mathrm{g0}} \exp\left(\frac{g_1\, p}{g_2 - p}\right) \tag{6-11}$$

mit der Glasübergangstemperatur des unausgehärteten Klebstoffs θ_{g0} für $p = 0$ und den Materialparametern g_1 und g_2 erfolgreich angewendet. Daher wird die Glasübergangstemperatur (6-11) auch in der vorliegenden Arbeit verwendet – 4-4.

6.3 Motivation des Materialmodells am rheologischen Netzwerk
Motivation of the model with the rheological network

Für die Motivation des Materialmodells am rheologischen Netzwerk werden die verwendeten rheologischen Grundelemente und Körper

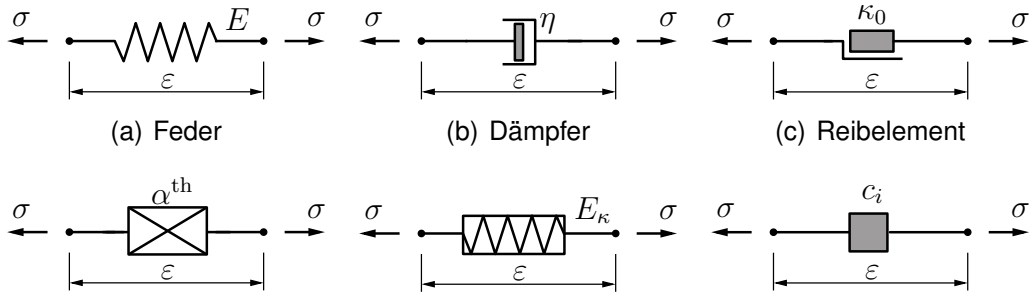
- Feder
- Dämpfer
- Reibelement
- thermisches Dehnungselement
- Verfestigungselement
- dissipatives Dehnungselement
- MAXWELL-Körper
- verallgemeinerter Festkörper vom MAXWELL-Typ

kurz erläutert. Des Weiteren werden die Möglichkeiten der Verschaltung der Elemente kurz dargestellt und erläutert.

6.3.1 Grundelemente
Basic elements

Feder Die Feder in Abb. 6-2(a) beschreibt i. Allg. den linearen Zusammenhang zwischen Kraft F und Verschiebung u mit der Federsteifigkeit c als Proportionalitätsfaktor. Analog wird sie als rheologisches Element zur Darstellung des linearen Zusammenhangs zwischen der Spannung σ und der Dehnung ε mit dem Elastizitätsmodul E verwendet und stellt das eindimensionale Modell nach HOOKE dar:

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{6-12}$$



(a) Feder (b) Dämpfer (c) Reibelement

(d) Thermisches Dehnungselement (e) Verfestigungselement (f) dissipatives Dehnungselement

Abbildung 6-2: Rheologische Grundelemente
Figure 6-2: Rheological basic elements

Dämpfer Der Dämpfer in Abb. 6-2(b) steht stellvertretend für die viskosen Materialeigenschaften und beschreibt den proportionalen Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der Dehnrate $\dot{\varepsilon}$ mit der Viskosität η wie folgt:

$$\sigma = \eta\,\dot{\varepsilon} \tag{6-13}$$

Die Gl. (6-13) wird auch als NEWTONsches Modell bezeichnet.

Reibelement Dem Reibelement in Abb. 6-2(c) liegt die Vorstellung der Trockenreibung zugrunde, bei der ein Körper über eine Ebene gleitet. Jedoch muss der Betrag der Spannung $|\sigma|$ aufgrund eines Belastungsprozesses zunächst die Fließgrenze κ_0 erreichen, bevor sich im Element eine Dehnung ε einstellt[8]. Wird die Fließgrenze nicht erreicht, verhält sich das Reibelement wie ein Starrkörper[9] und erfährt daher keine Dehnungsentwicklung. Damit ergeben sich für das Reibelement die Beziehungen

$$\dot{\varepsilon} \neq 0, \quad \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \qquad \text{für} \qquad |\sigma| = \kappa_0 \tag{6-14}$$

$$\dot{\varepsilon} = 0 \qquad \text{für} \qquad |\sigma| < \kappa_0 \tag{6-15}$$

mit der Vorzeichen- und Betragsfunktion[10] – s. [BM13a, S. 773]. Damit beschreibt das Reibelement das Verhalten eines ideal plastischen Körpers.

Thermisches Dehnungselement Das thermische Dehnungselement in Abb. 6-2(d) bildet die thermischen Dehnungen im rheologischen Modell ab, die im Allgemeinen dreidimensionalen Fall eine Volumendehnung ist. Besonders hervorzuheben ist, dass dieses Element bei einem spannungs- oder dehnungsgesteuerten Prozess weder Dehnungen noch Spannungen liefert sondern lediglich die temperaturinduzierte spannungsfreie Dehnung repräsentiert. Demzufolge agiert das thermische Dehnungselement bei einem Belastungsprozess wie ein starrer Körper – siehe auch [Kra86], [Lio00] und [BM13a].

[8] In der Vorstellung eines Körpers, der entlang einer Ebene reibt, ist dieser Prozess einer Gleitreibung zuzuordnen.

[9] Hier liegt die Vorstellung der Haftreibung zwischen Körper und Ebene zugrunde.

[10] Vorzeichenfunktion: $\operatorname{sgn}(x)\begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < \end{cases}$, Betragsfunktion: $|x| = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$

Die thermische Dehnrate $\dot{\varepsilon}$ ist proportional zur zeitlichen Temperaturänderung $\dot{\theta}$ mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α_{th}:

$$\dot{\varepsilon} = \alpha^{\mathrm{th}} \dot{\theta} \tag{6-16}$$

Die thermische Dehnung

$$\varepsilon = \alpha^{\mathrm{th}} (\theta - \theta_0) \tag{6-17}$$

kann bzgl. einer Referenztemperatur (z. B. Raumtemperatur) θ_0 in integrierter Form angegeben werden.

Verfestigungselement Das Verfestigungselement in Abb. 6-2(e) gehört zur Klasse der modifizierten Elemente nach [BM13a]. Es dient der Beschreibung isotroper Verfestigung, welche sich im Verlauf eines plastischen Fließprozesses aufbaut und bei Lastumkehr nicht verringert. Daher verhält sich das Verfestigungselement grundsätzlich wie eine linear elastische Feder und ist somit ein energiespeicherndes Element, dessen Spannung σ jedoch nicht von der Dehnung ε, sondern der Bogenlänge der Dehnung $\bar{\varepsilon}$ abhängt und so stets vorangetrieben wird. Die Spannung ist proportional zur Dehnung mit dem Verfestigungsmodul E_κ und berechnet sich zu

$$\sigma = E_\kappa \bar{\varepsilon} =: \kappa \quad . \tag{6-18}$$

Dissipatives Dehnungselement Das dissipative Dehnungselement in Abb. 6-2(f) ist von Bröcker und Matzenmiller in [BM13a, S. 758] als Verallgemeinerung des Elements zur Darstellung endochroner Plastizität von Krawietz[11] eingeführt worden. Es dient der Beschreibung von dissipativen Vorgängen in anderen Grundkörpern wie bspw. der Feder oder des Verfestigungselements und wird in Verbindung mit anderen Grundkörpern eingesetzt. Es dient somit der Begrenzung von energiespeichernden Eigenschaften der mit ihm verbundenen Elemente. Die an ihm verrichtete Arbeit wird vollständig in Form von Wärme dissipiert. Die innere Dehnung ε dieses Körpers entwickelt sich mit der Evolutionsgleichung

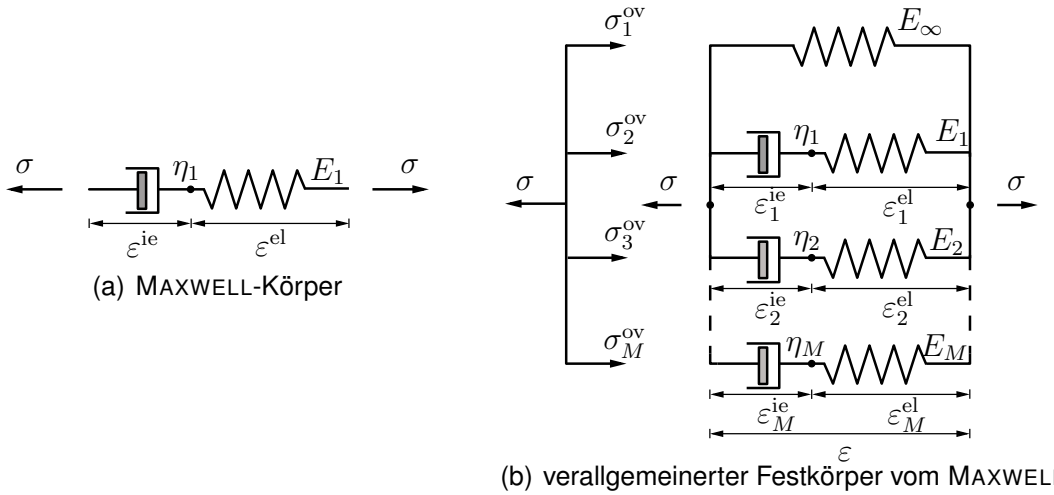
$$\dot{\varepsilon} = \zeta(\sigma, a_j) \tag{6-19}$$

als Funktion der Spannung σ und möglicher weiterer interner Variablen a_j mit den zugehörigen Materialparametern c_i. Das dissipative Element überträgt die von außen aufgebrachte Belastung lediglich, d. h. die Spannung des Elements ist keine Funktion bzw. kein Funktional der Dehnung. Für jedes dissipative Dehnungselement muss je nach Platzierung und gewünschtem Verhalten ein geeigneter Ansatz der Form (6-19) aufgestellt werden.

6.3.2 Viskoelastische Körper
Viscoelastic bodies

Durch die Verschaltung von Feder- und Dämpferelementen lassen sich viskoelastische Körper modellieren. Im Folgenden werden die Körper erläutert, die für das Materialmodell des Strukturklebstoffs notwendig sind. Für die Parallel- und Reihenschaltung

[11] [Kra86, S. 24 ff.]



(a) MAXWELL-Körper

(b) verallgemeinerter Festkörper vom MAXWELL-Typ

Abbildung 6-3: Modelle vom MAXWELL-Typ
Figure 6-3: Models of the MAXWELL-type

rheologischer Elemente ergeben sich Regeln für die Spannungen und Dehnungen, die in der Tabelle 6-1 am Beispiel der Elemente E_1 und E_2 aufgeführt sind – s. [BM13a].

MAXWELL-Körper Der MAXWELL-Körper entsteht aus der Parallelschaltung der Feder mit dem Dämpfer. Die Spannung ist aufgrund des Kräftegleichgewichts an Feder und Dämpfer identisch – vgl. Tabelle 6-1 rechts. Aus der Abb. 6-3(a) folgt direkt die Aufteilung der Dehnung ε in den inelastischen $\varepsilon^{\mathrm{ie}}$ und elastischen $\varepsilon^{\mathrm{el}}$ Anteil gemäß Tabelle 6-1 rechts:

$$\varepsilon = \varepsilon^{\mathrm{ie}} + \varepsilon^{\mathrm{el}} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{ie}} + \dot{\varepsilon}^{\mathrm{el}} \tag{6-20}$$

Für die Feder und den Dämpfer im MAXWELL-Körper folgt unter Verwendung der Beziehungen (6-12) und (6-13) zwischen der Spannung σ und den jeweiligen Dehnungen $\varepsilon^{\mathrm{ie}}$ respektive $\varepsilon^{\mathrm{el}}$:

$$\sigma = E_1\,\varepsilon^{\mathrm{el}} \Leftrightarrow \varepsilon^{\mathrm{el}} = \frac{\sigma}{E_1} \quad , \quad \sigma = \eta_1\,\dot{\varepsilon}^{\mathrm{ie}} \Leftrightarrow \dot{\varepsilon}^{\mathrm{ie}} = \frac{\sigma}{\eta_1} \tag{6-21}$$

Durch Einsetzen der Gln. (6-21) in Gl. (6-20)$_2$ folgt die lineare Differentialgleichung erster Ordnung für den MAXWELL-Körper mit der Relaxationszeit $\hat{\tau}_1$ und der Spannung σ:

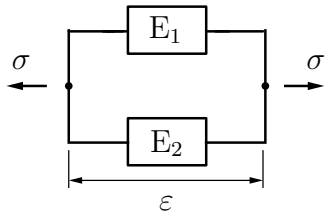
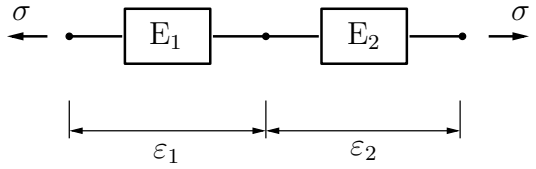
$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\hat{\tau}_1}\sigma = E_1\dot{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \hat{\tau}_1 = \frac{\eta_1}{E_1} \tag{6-22}$$

Weiter Informationen zum MAXWELL-Körper sind in [FLO76, S. 53 ff.], [Tsc89, S. 83 ff.], [Kra86, S. 10 ff.] zu finden.

Verallgemeinerter Festkörper vom MAXWELL-Typ Der verallgemeinerte Festkörper vom MAXWELL-Typ ist in Abb. 6-3(b) dargestellt. Er setzt sich aus der Parallelschaltung einer Feder mit M MAXWELL-Körpern zusammen. Aufgrund des Kräftegleichgewichts folgt, dass sich die Spannung σ am Körper aus der Gleichgewichtsspannung an der Feder σ^{eq} und der Summe der Überspannungen an den MAXWELL-Körpern σ_i^{ov} gemäß Tabelle 6-1 links zu

$$\sigma = \sigma^{\mathrm{eq}} + \sum_{i=1}^{M} \sigma_i^{\mathrm{ov}} \tag{6-23}$$

Tabelle 6-1: Regeln für die Netzwerkbildung [BM13a]
Table 6-1: Rules for network forming [BM13a]

Parallelschaltung	Reihenschaltung
	
$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$	$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$

zusammensetzt. Aus dem rheologischen Netzwerk in Abb. 6-3(b) folgt direkt die Kinematik am i-ten MAXWELL-Körper

$$\varepsilon = \varepsilon_i^{\mathrm{ie}} + \varepsilon_i^{\mathrm{el}} \quad , \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_i^{\mathrm{ie}} + \dot{\varepsilon}_i^{\mathrm{el}} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, M \quad . \tag{6-24}$$

Für die Überspannung am i-ten MAXWELL-Körper folgt analog der Beziehungen (6-21)

$$\sigma_i^{\mathrm{ov}} = \eta_i \, \dot{\varepsilon}^{\mathrm{ie}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon}^{\mathrm{ie}} = \frac{\sigma_i^{\mathrm{ov}}}{\eta_i} \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, M \tag{6-25}$$

$$\sigma_i^{\mathrm{ov}} = E_i \, \varepsilon_i^{\mathrm{el}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma}_i^{\mathrm{ov}} = E_i \, \dot{\varepsilon}_i^{\mathrm{el}} \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, M \quad . \tag{6-26}$$

Aus Gl. $(6\text{-}25)_2$ folgt nach Elimination der inelastischen Dehnrate $\dot{\varepsilon}_i^{\mathrm{ie}}$ mit der kinematischen Beziehung $(6\text{-}24)_2$ unter Verwendung von $(6\text{-}26)_2$ sukzessiv

$$\frac{\sigma_i^{\mathrm{ov}}}{\eta_i} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{ie}} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_i^{\mathrm{el}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_i^{\mathrm{ov}}}{\eta_i} = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_i^{\mathrm{ov}}}{E_i} \quad \Leftrightarrow$$

$$\dot{\sigma}_i^{\mathrm{ov}} + \frac{1}{\hat{\tau}_i} \sigma_i^{\mathrm{ov}} = E_i \, \dot{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \hat{\tau}_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, M \tag{6-27}$$

mit der Relaxationszeit $\hat{\tau}_i$ der i-ten Überspannung σ_i^{ov}. Durch Integration der Differentialgleichung $(6\text{-}27)_1$ mit dem integrierenden Faktor $\exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_i}\right)$ folgt

$$\left[\dot{\sigma}_i^{\mathrm{ov}} + \frac{1}{\hat{\tau}_i} \sigma_i^{\mathrm{ov}}\right] \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_i}\right) = E_i \, \dot{\varepsilon} \, \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_i}\right) \quad \Rightarrow \tag{6-28}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sigma_i^{\mathrm{ov}} \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_i}\right)\right] = E_i \, \dot{\varepsilon} \, \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_i}\right) \quad \Rightarrow \tag{6-29}$$

$$\sigma_i^{\mathrm{ov}}(t) \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_i}\right) - \sigma_i^{\mathrm{ov}}(0) = E_i \int_0^t \exp\left(-\frac{s}{\hat{\tau}_i}\right) \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s \quad \Rightarrow \tag{6-30}$$

$$\sigma_i^{\mathrm{ov}}(t) = E_i \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\hat{\tau}_i}\right) \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, M \tag{6-31}$$

unter der Annahme, dass die Überspannung des i-ten MAXWELL-Körpers σ_i^{ov} zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet. Das Faltungsintegral (6-31) beschreibt die Überspannung σ_i^{ov}

in Abhängigkeit der Zeit t mit der Änderung der Deformationsgeschichte $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}s}$. Die Gleichgewichtsspannung σ^{eq} ist analog zu (6-21)$_1$

$$\sigma^{\mathrm{eq}} = E_\infty \varepsilon \quad . \tag{6-32}$$

Nach Einsetzten der Gleichgewichts- (6-32) und der Überspannungen (6-31) in Gl. (6-23) folgt für die Spannung σ des verallgemeinerten Festkörpers vom MAXWELL-Typ

$$\begin{aligned} \sigma &= E_\infty \varepsilon + \int_0^t \sum_{i=1}^{M} E_i \exp\left(-\frac{t-s}{\hat{\tau}_i}\right) \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \quad \Leftrightarrow \\ \sigma &= \int_0^t \left[E_\infty + \sum_{i=1}^{M} E_i \exp\left(-\frac{t-s}{\hat{\tau}_i}\right)\right] \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{6-33}$$

mit der Relaxationsfunktion

$$R(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^{M} E_i \exp\left(-\frac{t-s}{\hat{\tau}_i}\right) \tag{6-34}$$

die als Dirichlet-Prony-Reihe bekannt ist. Die Parameter $\{E_i, \hat{\tau}_i; i = 1,\ldots,M\}$ aus der Summe der Exponentialfunktionen in der Relaxationsfunktion (6-34) werden als diskretes Relaxationsspektrum mit den Relaxationsstärken E_i und den Relaxationszeiten $\hat{\tau}_i$ bezeichnet. Damit stehen $2M+1$ Parameter zur Verfügung, um viskoelastisches Materialverhalten zu beschreiben.

Prozessabhängige Viskositäten / Relaxationszeiten – Verschiebungsprinzip In der vorliegenden Arbeit werden die viskoelastischen Materialeigenschaften des Klebstoffs neben dem von außen aufgeprägten mechanischen Belastungsprozess von den Prozessgrößen Temperatur $\theta(t)$ und Aushärtegrad $p(t)$ in der Zeit t beeinflusst. In der Theorie der linearen Viskoelastizität wird häufig davon ausgegangen, dass sich die Temperatur und der Aushärtegrad lediglich auf die Viskositäten bzw. Relaxationszeiten des Materialmodells auswirken. Dabei wird vorausgesetzt, dass alle Relaxationsmechanismen im Material die gleiche Abhängigkeit von der Temperatur und dem Aushärtegrad zeigen. In diesem Fall können die in Versuchen bei verschiedenen Temperaturen gemessenen Relaxationsfunktionen des Materials auf eine glatte Masterkurve bzgl. einer Referenztemperatur über der Zeitachse verschoben werden. Das Material wird dann als „thermorheologisch einfach“ bezeichnet – vgl. [SS52] – und die Methode der Verschiebung der Relaxationsfunktionen bei verschiedenen Temperaturen über der Zeitachse wird Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip oder allgemeiner Methode der reduzierten Variablen genannt – s. [Sch90, S. 202 ff.] und [Fer80, S. 266 ff.].

Adolf und Martin stellen in Versuchen an einem Epoxidharz in [AM90] fest, dass das Verschiebungsprinzip in ähnlicher Weise für die Abhängigkeit der Viskositäten bzw. Relaxationszeiten vom Aushärtegrad anwendbar ist. In [AM96] beschreiben sie die Anwendung des Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsprinzips und bezeichnen die Polymere, auf die diese Methode anwendbar ist, als chemorheologisch einfach.

In Materialmodellen wird diese Prozessabhängigkeit der Viskositäten bzw. Relaxationszeiten häufig durch Einführung der materiellen Zeit[12] ξ berücksichtigt, die sich nach [ML60, Gl. (3.10)] in Abhängigkeit der Prozessvariablen in Form einer Evolutionsgleichung entwickelt. In der vorliegenden Arbeit werden die Temperatur θ und der Aushärtegrad p als Prozessgrößen in der Entwicklung der materiellen Zeit $\dot{\xi}$ berücksichtigt:

$$\dot{\xi} = f_\xi\left(\theta(t), p(t)\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \int_0^t f_\xi\left(\theta(s), p(s)\right) \mathrm{d}s \quad \text{für} \quad \xi(0) = 0 \tag{6-35}$$

Die Evolutionsgleichung (6-35)$_1$ muss stets größer oder gleich Null sein, um das monotone Anwachsen der materiellen Zeit sicherzustellen. Im Vergleich zur physikalischen Zeit t läuft die Entwicklung der materiellen Zeit $\dot{\xi}(\theta, p)$ in Abhängigkeit der Prozessgrößen θ und p schneller, langsamer oder gleich schnell ab. Im letzten Fall sind die Temperatur θ und der Aushärtegrad p identisch mit den Referenzgrößen θ_{ref} und p_{ref} und es gilt

$$\xi(\theta_{\mathrm{ref}}, p_{\mathrm{ref}}) = t \quad \text{und} \quad f_\xi(\theta_{\mathrm{ref}}, p_{\mathrm{ref}}) = 1 \quad . \tag{6-36}$$

Versuche an Polymeren zeigen, dass die Relaxation unter hohen Temperaturen deutlich schneller abläuft als bei niedrigen. Unter der Voraussetzung, dass der Aushärtegrad $p = p_1$ fest[13] ist, muss also für die materielle Zeit $\xi(\theta)$ zu den beiden Temperaturen $\theta = \theta_1 = \text{const.}$ und $\theta = \theta_2 = \text{const.}$ folgendes gelten:

$$\xi(\theta_1, p_1) = f_\xi(\theta_1, p_1)\, t \quad \text{mit} \quad f_\xi(\theta_1, p_1) < 1 \quad \text{für} \quad \theta_1 < \theta_{\mathrm{ref}} \tag{6-37}$$

$$\xi(\theta_2, p_1) = f_\xi(\theta_2, p_1)\, t \quad \text{mit} \quad f_\xi(\theta_2, p_1) > 1 \quad \text{für} \quad \theta_2 > \theta_{\mathrm{ref}} \tag{6-38}$$

Die materielle Zeit wird für die Berechnung der Überspannung σ^{ov} im zweiten Term des Faltungsintegrals (6-33) wie folgt berücksichtigt:

$$\sigma^{\mathrm{ov}} = \int_0^{\xi(t)} \sum_{i=1}^{M} E_i \exp\left(-\frac{\xi(t) - s}{\hat{\tau}_i}\right) \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}s} \mathrm{d}s \tag{6-39}$$

Prozessabhängige Gleichgewichtsspannung Beim betrachteten Strukturklebstoff ist ab dem Übergang vom Fluid zum Festkörper ein Gleichgewichtsmodul E_∞ messbar, der abhängig vom chemischen Vernetzungsfortschritt ansteigt. Dies geht mit der Vorstellung einher, dass der Klebstoff unter einer konstanten Deformation auch nach unendlich langer Zeit Kräfte überträgt. Die zeitabhängigen Spannungen σ^{ov} relaxieren demnach asymptotisch gegen einen Grenzwert, der als Gleichgewichtsspannung σ^{eq} bezeichnet wird. Aus phänomenologischer Sicht ist ein Ansatz für die Gleichgewichtsspannung notwendig, der ein imperfektes Gedächtnis aufweist. Wird der unvernetzte Klebstoff deformiert und im deformierten Zustand vernetzt, dann wird er sich nicht in seine Aus-

[12] Anm.: Die prozessabhängige materielle Zeit wird in [Sch90, S. 203] als reduzierte Zeit bezeichnet. In [Val71] wird die prozessabhängige Zeitskala als „intrinsische Zeitskala“ bezeichnet.

[13] Anm.: Zu Demonstrationszwecken soll die Temperaturabhängigkeit der materiellen Zeit isoliert werden, indem der Aushärtegrad mit $p = p_1$ festgehalten wird. In realen Prozessen schreitet der Aushärtegrad in Abhängigkeit des Temperaturverlaufs in der Zeit voran.

gangslage zurück deformieren, wie es bei einem klassischen elastischen Ansatz der Fall wäre. Der Klebstoff bleibt vielmehr nach dem Vernetzungsprozess in seiner deformierten Lage, da das Polymernetzwerk hier spannungsfrei ist.
Eine anschauliche Herleitung zur Beschreibung des Einflusses der Vernetzung von Polymeren auf die Gleichgewichtsspannung unter simultan ablaufender Deformation wird in [HPS09b] anhand eines rheologischen Netzwerks gezeigt. Diese plausiblen Überlegungen führen zur folgenden Gleichung (6-40) für die Gleichgewichtsspannung σ^{eq}, die im ersten Term des Faltungsintegrals (6-33) des verallgemeinerten Festkörpers vom MAXWELL-Typ steht – s. [HPS09b, Gln. (3) und (4)]:

$$\sigma^{\mathrm{eq}} = \int_0^t E_\infty\left(p(t)\right) \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma}^{\mathrm{eq}} = E_\infty\left(p(t)\right)\dot{\varepsilon} \tag{6-40}$$

In [AC07] wird diesbezüglich von der Entwicklung der spannungsfreien Konfiguration des Materials während einer simultan ablaufenden chemischen Reaktion und Deformation gesprochen, die einen großen Einfluss auf die daraus resultierende Spannung im Vergleich zur Spannung unter Vernachlässigung dieser Prozessabhängigkeit hat – s. [AC07, S. 39 ff. und Abb. 2].
Der hypoelastische Ansatz $(6\text{-}40)_2$ wird im Rahmen des FOSTA Projekts P 878 [P8714, S. 141, Gl. $(5.13)_2$][14] zur Beschreibung der aushärtegradabhängigen Gleichgewichtsspannung des in dieser Arbeit untersuchten Strukturklebstoffs *EP 1* verwendet. In [Lan15, S. 85 ff.] wird der pseudo-elastische Ansatz aus [HPS09b] für die Anwendung auf acrylischen Knochenzement ebenfalls diskutiert.

6.3.3 Thermische Expansion und chemischer Schrumpf
Thermal expansion and chemical shrinkage

Beim Erwärmen des unausgehärteten Klebstoffs tritt neben der Wärmeausdehnung auch ein temperaturinduzierter chemischer Schrumpf auf, der vom Fortschritt der Vernetzungsreaktion des Klebstoffs abhängt. Beide Prozesse bewirken gegenläufige Volumendehnungen im Klebstoff die jeweils von der Temperatur und dem Aushärtegrad abhängen.
Bei der Aushärtung warmhärtender Klebstoffe tritt eine Volumenreduktion auf, die als chemische Schwindung oder chemischer Schrumpf bezeichnet wird. Die Phänomene der thermischen und chemischen Dehnung werden im Folgenden gemeinsam mit dem thermischen Dehnungselement 6-2(d) dargestellt. In [HPS09b, S. 774, Abb. 3] wird ein neues rheologisches Element für den Volumen-

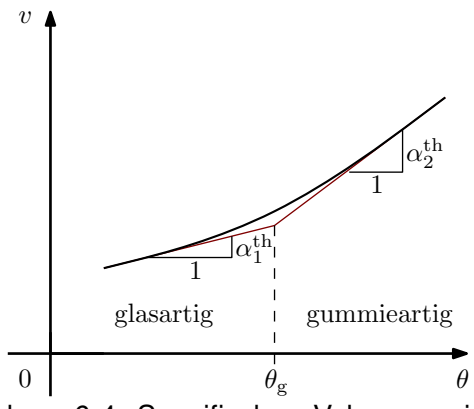


Abbildung 6-4: Spezifisches Volumen v in Abhängigkeit der Temperatur θ – vgl. [Sch90, S. 111, Abb. 6.3]
Figure 6-4: Specific volum v as function of temperature θ—cf [Sch90, S. 111, Abb. 6.3]

[14] Der Ansatz wird auch in [Lie14, S. 46, Gl. $(4.29)_2$] für den Strukturklebstoff *EP 1* verwendet.

schrumpf eingeführt. Hier wird davon abgesehen, da sowohl die thermische Dehnung als auch der chemische Schrumpf nur im Falle ihrer der Behinderung Kräfte und damit Spannungen im Klebstoff hervorrufen. Da die Wärmeausdehnung und der chemische Schrumpf isotrop sind, werden im Folgenden lediglich die skalaren Gleichungen der thermischen und chemischen Dehnung betrachtet.
Die thermochemische Dehnung $\varepsilon^{\mathrm{tc}}$ setzt sich additiv aus der thermischen $\varepsilon^{\mathrm{th}}$ und chemischen Dehnung $\varepsilon^{\mathrm{ch}}$ mit

$$\varepsilon^{\mathrm{tc}} = \varepsilon^{\mathrm{th}} + \varepsilon^{\mathrm{ch}} \tag{6-41}$$

zusammen. Das thermische Dehnungselement in Abb. 6-2(d) wird im Folgenden zum thermo-chemischen Dehnungselement erweitert.

Prozessabhängige thermische Dehnung Der Wärmeausdehnungskoeffizient α^{th} ist im allgemeinen eine Funktion der Temperatur θ mit $\alpha^{\mathrm{th}} = \hat{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta)$ – vgl. [Brö14, S. 83 f.]. Beim vorliegenden Klebstoff *EP 1* liegt ein Wärmeausdehnungsverhalten vor, dass für amorphe Polymere üblich ist. Amorphe Polymere haben die Eigenschaft, dass sich ihr Wärmeausdehnungskoeffizient $\hat{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta)$ im Bereich des Glasübergangs stark ändert [15]. In Abb. 6-4 ist der typische Verlauf des spezifischen Volumens $v = 1/\rho$ über der Temperatur θ dargestellt. Im Glasübergangsbereich beim Übergang vom glas- in den gummiartigen Zustand (s. Kapitel 6.2.2) erhöht sich der Wärmeausdehnungskoeffizient signifikant – s. [Sch90, S. 111]. Im Rahmen des FOSTA-Projekts P 878 sind Messungen am Klebstoff *EP 1* durchgeführt worden, die das beschriebene Verhalten der Wärmeausdehnung untermauern – s. [P8714, S. 124, Abb. 4.120]. Dabei wird auch gezeigt, das der Einfluss der Heizrate auf die thermische Dehnung in guter Näherung vernachlässigt werden kann. Für den vorliegenden Klebstoff *EP 1* wird der Ansatz

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{th}} = \begin{cases} \alpha_1^{\mathrm{th}}\,\dot{\theta} & \forall \quad \theta < \theta_{\mathrm{g}}(p) \\ \alpha_2^{\mathrm{th}}\,\dot{\theta} & \forall \quad \theta \geq \theta_{\mathrm{g}}(p) \end{cases} \tag{6-42}$$

mit den beiden Wärmeausdehnungskoeffizient α_1^{th} und α_2^{th} und der Glasübergangstemperatur θ_{g} (6-11) verwendet. Die thermische Dehnung (6-42) approximiert die Änderung des Wärmeausdehnungskoeffizienten am Glasübergang mit zwei Geraden.
In [P8714, S. 127, Gl. (4.9)] wird die thermische Dehnung (6-42) um den Einfluss des Aushärtegrads p mit einem linearen Ansatz und dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α_3^{th} erweitert:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{th}} = \begin{cases} \alpha_1^{\mathrm{th}}\,\dot{\theta} & \forall \quad \theta < \theta_{\mathrm{g}}(p) \\ \alpha_2^{\mathrm{th}}\,\dot{\theta} + (\alpha_3^{\mathrm{th}} - \alpha_2^{\mathrm{th}})(1-p)\,\dot{\theta} & \forall \quad \theta \geq \theta_{\mathrm{g}}(p) \end{cases} \tag{6-43}$$

Chemischer Schrumpf Für die chemische Dehnung existiert keine allgemein anerkannte konstitutive Beziehung, wie es für die thermische Dehnung der Fall ist – s. Gl. (6-16) bzw. (6-17). In [HPS09b] wird ein Ansatz aus [Kia00] verwendet, der die chemische Dehnung $\varepsilon^{\mathrm{ch}}$ in Abhängigkeit der Zeit t für einen bestimmten zeitlichen Verlauf der chemischen Vernetzung mit sechs Materialparametern beschreibt. Dieser Ansatz ist für

[15] Anm.: Der Wärmeausdehnungskoeffizient unterhalb der Glasübergangstemperatur beträgt lediglich etwa ein drittel des Wertes oberhalb der Glasübergangstemperatur – [Sch90]

die Prognose etwaiger Prozesse jedoch nicht geeignet, da die Evolution des Aushärtegrads in Abhängigkeit des Zeit-Temperaturverlaufs $\theta(t)$ hier nicht berücksichtigt wird. In [LH07, S. 76 und 78, Gl. (4.6)] wird für den chemischen Schrumpf eine lineare Funktion in Abhängigkeit des Aushärtegrads mit einem Materialparameter vorgeschlagen. Des Weiteren wird angenommen, dass sich die thermische Dehnung linear mit dem Aushärtegrad ändert – s. [LH07, S. 76 und 78, Gl. (4.5)]. In [MdBS$^+$04] wird für den chemischen Schrumpf eine Integralgleichung mit dem zeitabhängigen Schwindungsparameter $\alpha_{\mathrm{cur}}(t)$ und der Evolution des Aushärtegrads $\dot{p}$ angegeben. Den Messergebnissen aus [AMC$^+$98] folgend wird der Schwindungsparameter $\alpha_{\mathrm{cur}} = \text{const.}$ gesetzt, womit der chemische Schrumpf proportional zum Aushärtegrad p mit dem Proportionalitätsfaktor α_{cur} ist – s. Tabelle 6-2. Die aufgezählten Ansätze für den chemischen Schrumpf sind in Tabelle 6-2 zusammengefasst.

In Absprache mit dem projektbegleitenden Arbeitskreis wird für die Beschreibung des chemischen Schrumpfs im vorliegenden Projekt der Ansatz

$$\varepsilon^{\mathrm{ch}} = \frac{1}{3}\left(\hat{\beta}_2\, p - \hat{\beta}_1\, p^2\right) \tag{6-44}$$

aus [P8714, S. 132, Gl. (4.14)] verwendet, der anhand von Messergebnissen am Klebstoff *EP 1* empirisch entwickelt worden ist – s. a. [Lie14, S. 93, Gln. (6.22), (6.23) und Abb. 6.21].

6.3.4 Erweitertes TAPO-Modell
Extended TAPO model

Das erweiterte TAPO-Modell wird mithilfe des eindimensionalen rheologischen Netzwerks in Abb. 6-5 motiviert. Von links nach rechts besteht das Materialmodell aus der Reihenschaltung des verallgemeinerten Festkörpers vom MAXWELL-Typ, dem thermischen Dehnungselement und dem TAPO-Modell. Das TAPO-Modell wird durch die Parallelschaltung des Reibelements mit der nichtlinearen und linearen Verfestigung repräsentiert, wobei die nichtlineare Verfestigung aus der Reihenschaltung des Verfestigungselements mit dem nichtlinearen dissipativen Dehnungselement entsteht. Aus dem Netzwerk ergibt sich direkt die additive Aufspaltung der Dehnung in den viskoelastischen (ve), thermo-chemische (tc) und plastischen (pl) Anteil zu

$$\varepsilon = \varepsilon^{\mathrm{ve}} + \varepsilon^{\mathrm{tc}} + \varepsilon^{\mathrm{pl}} \quad . \tag{6-45}$$

Tabelle 6-2: Ansätze für den chemischen Schrumpf
Table 6-2: Ansatzes for the chemical shrinkage

Modellgleichungen	Schrifttum
$\varepsilon^{\mathrm{ch}}(t) = P_1 \exp\left[-\left(\frac{P_2}{t}\right)^{P_3}\right] + P_4 \exp\left[-\left(\frac{P_5}{t}\right)^{P_6}\right]$ für $P_1, P_4 < 0$	[Kia00, Gl. (3.17)]
$\varepsilon^{\mathrm{ch}} = \sqrt[3]{1+\beta_{\mathrm{c}}\, p} - 1$ für $\beta_{\mathrm{c}} \leq 0$, s. Kapitel A.2.2	[LH07, Gl. (4.6)]
$\varepsilon^{\mathrm{ch}} = -\int_{-\infty}^{t} \alpha_{\mathrm{cur}}(s)\, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{\mathrm{ch}} = -\alpha_{\mathrm{c}}\, p$ für $\alpha_{\mathrm{c}} = \text{const.}$	[MdBS$^+$04, Gl. (11)]
$\varepsilon^{\mathrm{ch}} = \frac{1}{3}\left(\hat{\beta}_2\, p - \hat{\beta}_1\, p^2\right)$	[Lie14, Gln. (6.22), (6.23)]

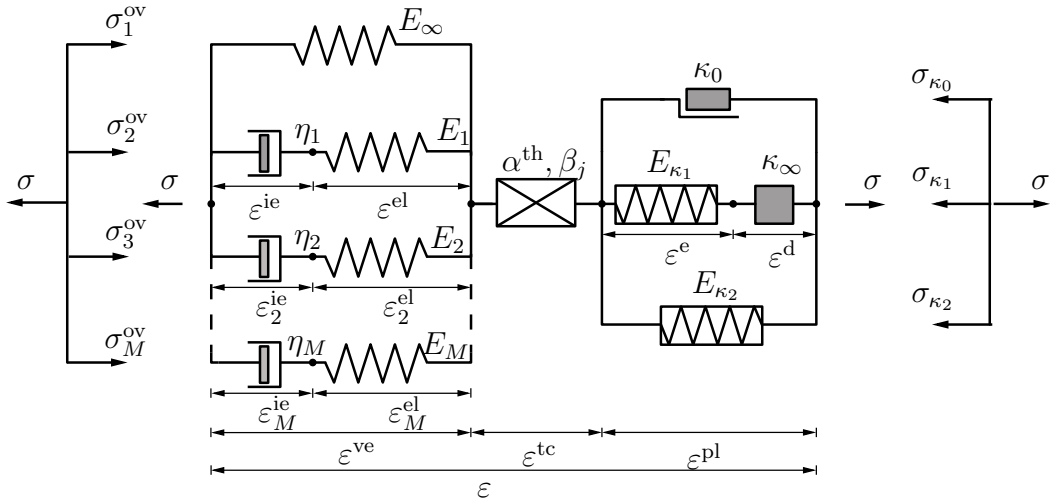


Abbildung 6-5: Thermo-chemo-viskoelastisch-plastisches Materialmodell im eindimensionalen rheologischen Netzwerk
Figure 6-5: Thermo-chemo-viscoelastic-plastic material model in one-dimensional rheological network

Für die Spannung am verallgemeinerten Festkörper vom MAXWELL-Typ (6-39) gilt

$$\sigma = \int_0^t E_\infty(p(s)) \, \frac{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s + \int_0^{\xi(t)} \sum_{i=1}^{M} E_i \exp\left(-\frac{\xi(t)-s}{\hat{\tau}_i}\right) \frac{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s \tag{6-46}$$

und unter Berücksichtigung der Kinematik (6-45) folgt

$$\sigma = \int_0^t E_\infty(p(s)) \, \frac{\mathrm{d}\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{tc}} - \varepsilon^{\mathrm{pl}}\right)}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s + \int_0^{\xi(t)} \sum_{i=1}^{M} E_i \exp\left(-\frac{\xi(t)-s}{\hat{\tau}_i}\right) \frac{\mathrm{d}\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{tc}} - \varepsilon^{\mathrm{pl}}\right)}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s \quad . \tag{6-47}$$

Für den isothermen Fall $\dot{\theta}$ und für $\sigma < \kappa_0$ folgt $\varepsilon^{\mathrm{th}} = \varepsilon^{\mathrm{pl}} = 0$ und (6-47) geht über in das Faltungsintegral (6-33).

Plastizitätsmodell Im TAPO-Modell wird nach Überschreiten der Anfangsfließspannung κ_0 im Reibelement eine plastische Dehnung $\varepsilon^{\mathrm{pl}}$ hervorgerufen, die in der Spannung (6-47) berücksichtigt wird. Die plastische Dehnung wird aus dem Gleichungssatz für die Plastizität unter Berücksichtigung der nichtlinearen isotropen Verfestigung berechnet, der für den eindimensionalen Fall direkt aus dem rheologischen Netzwerk in Abb. 6-5 sukzessiv hergeleitet wird. Die hergeleiteten Beziehungen im eindimensionalen dienen der Diskussion und Motivation des Materialmodells, sind jedoch nur in speziellen Fällen direkt auf die dreidimensionalen Modellgleichungen übertragbar. Nach Anwendung der Gleichgewichtsbedingung am rechten Teilmodell in Abb. 6-5 folgt für die Beziehung zwischen den Spannungen σ, σ_{κ_0}, σ_{κ_1} und σ_{κ_2}

$$\sigma = \sigma_{\kappa_0} + \sigma_{\kappa_1} + \sigma_{\kappa_2} \quad . \tag{6-48}$$

Mit der Definition der Spannung am Verfestigungselement (6-18) folgt für die mittlere Kette zunächst die Beziehung

$$\kappa_1 = E_{\kappa_1}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{e}} = E_{\kappa_1}\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} - \bar{\varepsilon}^{\mathrm{d}}\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{\kappa}_1 = E_{\kappa_1}\left(\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} - \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{d}}\right) \tag{6-49}$$

mit dem Verfestigungsmodul E_{κ_1}, der Bogenlänge der plastischen Dehnung $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}$ und Dehnung am dissipativen Dehnungselement $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{d}}$ – s. Abb. 6-2(f). Der Definition (6-19) folgend wird die Dehnrate des dissipativen Dehnungselements $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{d}}$ in $(6\text{-}49)_2$ mit dem folgenden Ansatz aus aus [BM13a, Gl. (72)] beschrieben:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{d}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_\infty}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} \tag{6-50}$$

Für die Rate der Verfestigungsspannung $(6\text{-}49)_2$ folgt nach Einsetzen der Dehnrate (6-50) die lineare implizite Differentialgleichung

$$\dot{\kappa}_1 = E_{\kappa_1}\left(1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_\infty}\right)\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} \quad . \tag{6-51}$$

Die Lösung[16] der Differentialgleichung (6-51) folgt zu

$$\kappa_1 = \kappa_\infty\left[1 - \exp\left(-\frac{E_{\kappa_1}}{\kappa_\infty}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)\right] \tag{6-52}$$

mit der Anfangsbedingung $\kappa(0) = 0$ – vgl. [BM13a, Gl. (73)] und [Brö14, S. 39]. Für das Verfestigungselement der untersten Kette gilt die Beziehung

$$\kappa_2 = E_{\kappa_2}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} \quad . \tag{6-53}$$

Die Spannungen am rechten Teil des rheologischen Netzwerks sind nach Aufteilung in Betrag und Richtung:

$$\sigma = |\sigma|\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\sigma}\right), \quad \sigma_{\kappa_0} = \kappa_0\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right), \quad \sigma_{\kappa_1} = \kappa_1\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}\right), \quad \sigma_{\kappa_2} = \kappa_2\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) \tag{6-54}$$

Aus der Gleichgewichtsbeziehung (6-48) folgt dann mit den Spannungen (6-54) die Beziehung

$$|\sigma|\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\sigma}\right) = \kappa_0\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) + \kappa_1\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}\right) + \kappa_2\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) \quad . \tag{6-55}$$

Mit der hinreichenden Bedingung, dass die Entwicklungsrichtungen der Dehnung am Verfestigungselement $\mathrm{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}\right)$ und der plastischen Dehnung $\mathrm{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)$ identisch sind, folgt

[16] Die ausführliche Lösung der Differentialgleichung ist im Anhang Kapitel A.2.1 aufgeführt.

nach Einsetzen der Beziehungen (6-52) und (6-53)

$$|\sigma| \operatorname{sgn}(\dot{\sigma}) = (\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) \tag{6-56}$$

$$= \left(\kappa_0 + \kappa_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{E_{\kappa_1}}{\kappa_\infty}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)\right] + E_{\kappa_2}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) \operatorname{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) \quad . \tag{6-57}$$

Die Beträge der Spannungen in der Gleichgewichtsbeziehung (6-57) sind alle stets positiv. Damit ist die Gleichung nur dann erfüllt, wenn die Entwicklungsrichtung der Spannung $\operatorname{sgn}(\dot{\sigma})$ und plastischen Dehnung $\operatorname{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)$ identisch sind. Mit der Identität $\operatorname{sgn}(\dot{\sigma}) = \operatorname{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)$ folgt für das Gleichgewicht der Spannungsbeträge

$$|\sigma| - \underbrace{\left(\kappa_0 + \kappa_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{E_{\kappa_1}}{\kappa_\infty}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)\right] + E_{\kappa_2}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)}_{\tilde{\kappa}} = 0 =: f \quad , \tag{6-58}$$

das als Fließfunktion f des eindimensionalen viskoelastisch-plastischen Materialmodells definiert wird. Aufgrund der hinreichenden Bedingung $\operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}) = \operatorname{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)$ folgt dann aus (6-58) die Normalenregel der assoziierten Plastizität

$$\operatorname{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right) = \operatorname{sgn}(\dot{\sigma}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma} \quad . \tag{6-59}$$

Der plastische Fluss $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}$ folgt aus der Normalenregel mit dem plastischen Multiplikator λ als Betrag der plastischen Dehnrate und der Richtung der Spannungsentwicklung $\operatorname{sgn}(\dot{\sigma})$:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} = \lambda \operatorname{sgn}(\dot{\sigma}) \quad . \tag{6-60}$$

Im Allgemeinen Fall muss die Fließbedingung (6-59) nicht gelten, da sie sich aus der hinreichenden und nicht notwendigen Bedingung $\operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}) = \operatorname{sgn}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)$ ableitet und somit nicht alle möglichen Fälle einbezieht. Im allgemeinen können die Grenzen von Materialmodellen mit einer nichtassoziierten Fließregel erweitert werden. Bei nichtassoziierten Modellen ist die Entwicklungsrichtung der plastischen Dehnung nicht mit der Entwicklungsrichtung der Spannung identisch, da der plastische Fluss aus dem plastischen Potential $f^* \neq f$ mit dem plastischen Multiplikator λ berechnet wird:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} = \lambda \frac{f^*}{\sigma} \quad \text{mit} \quad \frac{f^*}{\sigma} \neq \frac{f}{\sigma} \quad . \tag{6-61}$$

In der Fließfunktion (6-58) enthält die Verfestigungsspannung

$$\tilde{\kappa} = \kappa_0 + \underbrace{\kappa_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{E_{\kappa_1}}{\kappa_\infty}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)\right] + E_{\kappa_2}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}}_{\tilde{R}} \tag{6-62}$$

mit der Anfangsfließspannung κ_0 und der nichtlinearen isotropen Verfestigungsspannung

$$\tilde{R} = \kappa_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{E_{\kappa_1}}{\kappa_\infty}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}\right)\right] + E_{\kappa_2}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} \quad , \tag{6-63}$$

die aus einem nichtlinearem, sättigendem Term und einem linearen Term besteht. Die nichtlineare isotrope Verfestigung $\tilde{R}$ wird von der plastischen Bogenlänge $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}$ angetrieben und ist formal identisch mit der Verfestigungsspannung des TAPO-Modells in [BBB$^+$13, S. 266, Gl. (113)]. Durch Koeffizientenvergleich der Fließspannungen (6-62) und [BBB$^+$13, S. 266, Gl. (111)][17] folgt der Zusammenhang zwischen den Materialparametern der rheologischen Elemente des eindimensionalen plastischen Modellteils in Abb. 6-5 mit denen des TAPO-Modells:

$$\tau_0 = \kappa_0 \quad , \quad q = \kappa_\infty \quad , \quad b = \frac{E_{\kappa_1}}{\kappa_\infty} \quad \text{und} \quad H = E_{\kappa_2} \quad . \tag{6-64}$$

Das eindimensionale rheologische Netzwerk des plastischen Teilmodells in Abb. 6-5 bildet somit das TAPO-Modell mit der nichtlinearen isotropen Verfestigung ab.

Temperatur- und aushärtegradabhängige Verfestigung In dem bisher betrachteten TAPO-Modell sind die Anfangsfließ- und Verfestigungsspannung von der Temperatur θ und dem Aushärtegrad p unabhängig. Daher wird im Folgenden der Ansatz verfolgt, dass die Anfangsfließspannung und die Materialparameter der Verfestigungsspannung Funktionen der Temperatur und des Aushärtegrads sind. Grundsätzlich kann dann für jeden Materialparameter in der Fließspannung $\tilde{\kappa}$ (6-62) des TAPO-Modells ein Funktionen in Abhängigkeit der Temperatur und des Aushärtegrads

$$\kappa_0 = \hat{\kappa}_0(\theta, p) \quad , \quad E_{\kappa_1} = \hat{E}_{\kappa_1}(\theta, p) \quad , \quad E_{\kappa_2} = \hat{E}_{\kappa_2}(\theta, p) \quad \text{und} \quad \kappa_\infty = \hat{\kappa}_\infty(\theta, p) \tag{6-65}$$

angesetzt werden.
Die in diesem Abschnitt vorgestellten Konstitutivgleichungen werden im Folgenden sinngemäß für die Entwicklung des TAPO-Kohäsivzonenmodells verwendet. Im Zuge der Anpassung des TAPO-Kohäsivzonenmodells an Messdaten aus Versuchen an der Scher- und Kopfzugprobe zeigt sich, welche Temperatur- und Aushärtegradfunktionen für die Abbildung des phänomenologischen Materialverhaltens des Klebstoffs notwendig sind.

6.4 Thermo-chemo-viskoelastisches Kohäsivzonenmodell Thermo-chemo-viscoelastic cohesive zone model

6.4.1 Faltungsintegral der viskoelastischen Spannung Convolution integral of viscoelastic stress

Die in dieser Arbeit betrachteten Klebverbindungen mit Strukturklebstoffen weisen typischerweise Klebschichtdicken d_{k} zwischen $0.1\,\mathrm{mm}$ und $1\,\mathrm{mm}$ auf – s. [DLB13, S. 11]. Im Vergleich zu den Abmaßen der zu verklebenden Substrate sind Klebschichtdicken in der Größenordnung von $10^{-1}\,\mathrm{mm}$ als sehr dünn anzusehen. Im Rahmen dieser Arbeit beträgt die Klebschichtdicke der Verbundproben stets $d_{\mathrm{k}} = 0.3\,\mathrm{mm}$. Aufgrund der geringen

[17] In dieser Gl. wird für den Koeffizientenvergleich der Ansatz nach Johnson und Cook [JC83] für die Ratenabhängigkeit der Fließspannung nicht berücksichtigt, da im Rahmen der vorliegenden Arbeit lediglich langsam ablaufende Aufheiz- und Abkühlraten betrachtet werden, die für die Aushärtung des warmhärtenden Strukturklebstoffs üblich sind. Die Dehnratenabhängigkeit ist für die Crashanalyse notwendig und daher eingeführt worden.

Klebschichtdicke zwischen den Substraten ist die Annahme der Klebschicht als eine Grenzschicht, die als dreidimensionales, dünnes Kontinuum eine Übergangszone zwischen zwei Phasen mit unterschiedlichen Eigenschaften bildet, gerechtfertigt und kann bei sehr geringer Dicke als zweidimensionale Grenzfläche approximiert werden. In den Arbeiten [P7912], [BBB+13], [Bur15] und [P8714] ist die Approximation der Klebschicht als Grenzfläche bereits erfolgreich eingesetzt worden. Dabei liegt der Vorteil der Grenzflächenformulierung in der numerischen Effizienz, da lediglich drei statt der üblichen sechs Spannungskomponenten in der Materialroutine eines FE-Programms berechnet werden. Dieser Vorteil zeigt sich besonders in der Berechnungszeit bei der numerischen Simulation großer Strukturen wie bspw. Fahrzeugkarosserien, deren Klebnähte je nach Hersteller eine Gesamtlänge von etwa um die $100\,\mathrm{m}$ bis $200\,\mathrm{m}$ oder mehr aufweisen.

Der funktionale Zusammenhang zwischen der CAUCHY-Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ und der linearen Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird im Sinne der Grenzflächentheorie für die Beschreibung von Kohäsivzonenmodellen übertragen. Dafür wird der lokale Spannungsvektor der Grenzfläche $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_\mathrm{n} & t_\mathrm{t} & t_\mathrm{b} \end{bmatrix}^\top$ als Funktional der lokalen Verschiebungsdiskontinuität $\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_\mathrm{n} & \Delta_\mathrm{t} & \Delta_\mathrm{b} \end{bmatrix}^\top$ mit den Zeitvariablen t und τ postuliert:

$$\mathbf{t}(t) = \mathscr{F}_{\tau \leq t} \left\{ \boldsymbol{\Delta}(\tau); \tau, t \right\} \quad . \tag{6-66}$$

Das Postulat (6-66) ist bereits in den Arbeiten [Kur10, S. 32, Gl. (3.8)], [P7912, S. 60] und [P8714, S. 177, Gl. (6.4)] erfolgreich für viskoelastische und in [Bur15, Kap. 7] für elastoplastische Modelle angewendet worden. Ausgehend von [P7912, S. 60, Gl. 3.3-3] wird der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ der Grenzfläche für den isothermen Fall $\dot{\theta} = 0$ ohne Schädigung $D = 0$ für den vollständig ausgehärteten Klebstoff $p = 1$ mit dem Faltungsintegral

$$\mathbf{t}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta}}{\mathrm{d}\tau} \, \mathrm{d}\tau \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \infty \tag{6-67}$$

berechnet, dessen Kernfunktion die Matrix der Relaxationsfunktionen $\mathbf{R}$ ist. Die drei Spannungskomponenten t_n, t_t und t_b des lokalen Spannungsvektors der Grenzfläche $\mathbf{t}$ sind voneinander entkoppelt, womit für die Komponenten im Faltungsintegral (6-67) die Vektor-Matrix-Notation

$$\begin{bmatrix} t_\mathrm{n} \\ t_\mathrm{t} \\ t_\mathrm{b} \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} R_\mathrm{n}(t-\tau) & 0 & 0 \\ 0 & R_\mathrm{s}(t-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & R_\mathrm{s}(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_\mathrm{n}' \\ \Delta_\mathrm{t}' \\ \Delta_\mathrm{b}' \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \quad \text{mit} \quad \Delta' = \frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\tau} \tag{6-68}$$

folgt. Bei Beanspruchungen in Richtung der Grenzflächennormalen $\mathbf{e}_\mathrm{n}$ wirkt die Relaxationsfunktion $R_\mathrm{n}(t)$ und in Richtung der Tangentialen $\mathbf{e}_\mathrm{t}$ und Binormalen $\mathbf{e}_\mathrm{b}$ jeweils die Schubrelaxationsfunktion $R_\mathrm{s}(t)$.

Auf Grundlage der eindimensionalen Betrachtungen in Kapitel 6.3 wird das Kohäsivzonenmodell für die Berechnung des thermomechanischen Verhaltens von Strukturklebstoffen im rheologischen Netzwerk 6-6 motiviert – vgl. Abb. 6-5. Im Fall des Kohäsivzonenmodells dient das rheologische Netzwerk lediglich der Übersicht, da sich im Vergleich zum eindimensionalen Modell nicht alle Materialgleichungen direkt aus dem Netzwerk herleiten lassen. Jedoch wird auch hier die Verschaltung der Teilmodelle zum

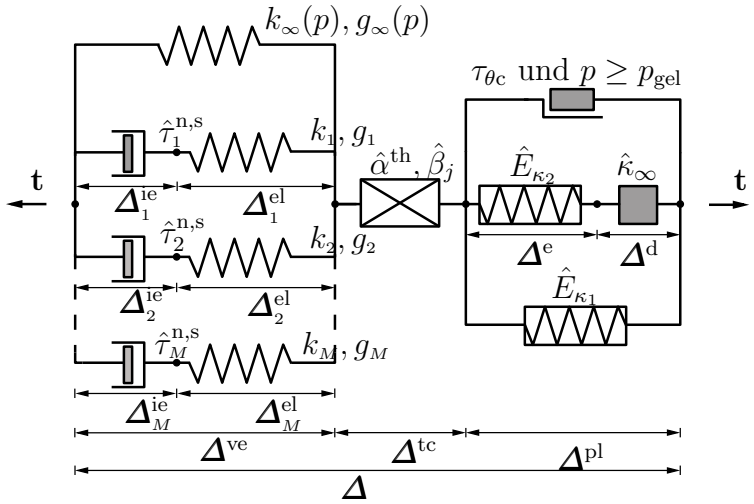


Abbildung 6-6: Thermo-chemo-viskoelastisch-plastisches Kohäsivzonenmodell im rheologischen Netzwerk
Figure 6-6: Thermo-chemo-viscoelastic-plastic cohesive zone model in rheological network

Gesamtmodell deutlich und im Fall einer Beanspruchung in eine der beiden Schubrichtungen ist das Verhalten des Kohäsivzonenmodells mit dem eindimensionalen Modell für kleine Deformationen vergleichbar.

In Abb. 6-6 wird das Konstitutivmodell für die Normal- , Tangential- und Binormalkomponente des Grenzflächenspannungsvektors gemeinsam dargestellt. Beim viskoelastischen Teilmodell im Netzwerk 6-6 (links) werden die Parameter für die Normal- und Schubbeanspruchung jeweils gemeinsam an die rheologischen Körper geschrieben. Die Parameter des Verfestigungsmodells an den rheologischen Elementen des Plastizitätsmodells in Abb. 6-6 (rechts) dienen lediglich der Motivation. Somit lässt sich die Grenzflächenspannung nicht direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen an den rheologischen Elementen herleiten.

Das rheologische Netzwerk zeigt von links nach rechts den generalisierten Festkörper vom MAXWELL-Typ für das Grenzflächenmodell – vgl. Abb. 6-3 –, der durch Parallelschaltung der M MAXWELL-Ketten entsteht. Die Dämpfer und Federn bilden jeweils die Relaxationszeiten in Normal- $\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}$ und Tangential- sowie Binormalenrichtung $\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}$ bzw. die Zug- k_i und Schubsteifigkeiten g_i für die drei Komponenten des Vektors der ratenabhängigen lokalen Überspannung $\mathbf{t}_i^{\mathrm{ov}}$ ab. Die parallel zu den MAXWELL-Ketten geschaltete Feder mit der Zug- k_∞ und Schubsteifigkeit g_∞ bildet die Gleichgewichtsspannung $\mathbf{t}^{\mathrm{eq}}$ ab, gegen die die Grenzflächenspannung $\mathbf{t}$ bei konstantem Verschiebungssprung $\boldsymbol{\Delta}(t) = \mathrm{const.}$ asymptotisch nach unendlich langer Zeit t relaxiert.

Das thermische Dehnungselement in der Mitte des Netzwerks 6-6 bildet eine thermische und chemische Verschiebungsdiskontinuität zwischen den Substraten ab, die im folgenden Kapitel 6.5 aus der Wärmeausdehnung (6-43) bzw. dem chemischen Schrumpf (6-44) des Klebstoffs postuliert werden.

Auf der rechten Seite des Netzwerks 6-6 ist das TAPO-Plastizitätsmodell mit dem Reibelement 6-2(c), Verfestigungselement 6-2(e) und dem dissipativen Dehnungselement 6-2(f) analog dem eindimensionalen Modell (6-62) dargestellt. Die Gleichungen des plastischen Teilmodells für die Kohäsivzone werden in Kapitel 6.6 erläutert.

Analog zur Netzwerkregel in Tabelle 6-1 (rechts) folgt aus der Reihenschaltung der Teilmodelle im rheologischen Netzwerk 6-6 direkt die additive Aufspaltung der lokalen Verschiebungsdiskontinuität

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} + \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{tc}} + \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \tag{6-69}$$

in einen viskoelastischen $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}}$, thermochemischen $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{tc}}$ und plastischen Anteil $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}$.

6.4.2 Prozessabhängige Spannung
Process-dependend Stress

Der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells ist gemäß den Ausführungen in Kapitel 6.3.2 von den Prozessgrößen Temperatur θ und Aushärtegrad p abhängig, deren Einfluss auf die Relaxationszeiten $\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}$ und $\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}$ gemäß der motivierten Spannung (6-47) durch Einführung der reduzierten Zeit ξ in das Faltungsintegral (6-67) berücksichtigt werden. Darüber hinaus wird das Faltungsintegral der Grenzflächenspannung (6-67) um einen zusätzlichen Term erweitert, der analog zur Gleichgewichtsspannung Gl. (6-40) die Abhängigkeit des Gleichgewichtsspannungsvektors der Grenzfläche $\mathbf{t}_{\mathrm{eq}}$ vom Aushärtegrad p im Kohäsivzonenmodell berücksichtigt. Der Grenzflächenspannungsvektor

$$\mathbf{t} = \underbrace{\int_0^t \mathbf{K}_\infty\left(p(\tau)\right) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau}_{\mathbf{t}^{\mathrm{eq}}} + \underbrace{\int_0^{\xi(t)} \mathbf{R}\left(\xi(t)-\tau\right) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau}_{\mathbf{t}^{\mathrm{ov}}} \tag{6-70}$$

beschreibt dann im ersten Term die aushärtegradabhängige Gleichgewichtsspannung der Grenzfläche $\mathbf{t}^{\mathrm{eq}}$ mit dem Tensor der Gleichgewichtssteifigkeit $\mathbf{K}_\infty$ und der zweite Term den Überspannungsvektor der Grenzfläche $\mathbf{t}^{\mathrm{ov}}$ mit dem Tensor der Relaxationsfunktionen $\mathbf{R}$, der bereits im Faltungsintegral (6-68) als Kernfunktion eingeführt worden ist[18] – s. a. [P7912]. Der Tensor der Gleichgewichtssteifigkeit $\mathbf{K}_\infty$ besteht aus der Zug- k_∞ und Schubsteifigkeit g_∞ und wird wie folgt in Form einer Diagonalmatrix definiert – vgl. [Bur15, S. 90, Gl. (7.38)]:

$$\mathbf{K}_\infty = \begin{bmatrix} k_\infty(p) & 0 & 0 \\ & g_\infty(p) & 0 \\ \text{sym.} & & g_\infty(p) \end{bmatrix} \quad . \tag{6-71}$$

Die in der Matrix $\mathbf{R}$ in Gl. (6-68) enthaltenen Relaxationsfunktionen für Normal- $R_{\mathrm{n}}(t)$ und Schubbeanspruchung $R_{\mathrm{s}}(t)$ ergeben sich aus den Feder- und Dämpferelementen des M-kettigen MAXWELL-Festkörpers im Netzwerk 6-6 zu

$$R_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{M} k_i \exp\left(-\frac{\xi}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \quad \text{und} \quad R_{\mathrm{s}} = \sum_{i=1}^{M} g_i \exp\left(-\frac{\xi}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right) \tag{6-72}$$

[18] Im FOSTA Vorgängerprojekt P 878 sind die Steifigkeiten der Gleichgewichtsspannung innerhalb des Tensors der Relaxationsfunktionen R berücksichtigt worden, da sie von etwaigen Prozessgrößen unabhängig sind – s. [P8714, Gln. 6.29a und b]. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden im Rahmen dieser Arbeit die Gleichgewichts- und Überspannung getrennt betrachtet.

mit der reduzierten Zeit ξ zur Abbildung der Prozessabhängigkeit der Relaxationszeiten $\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}$ und $\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}$ der MAXWELL-Ketten – vgl. [P7912, S. 61, Gln. (3.3-5)]. Die Relaxationszeiten

$$\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}} = \frac{\eta_i^{\mathrm{n}}}{k_i} \quad \text{und} \quad \hat{\tau}_i^{\mathrm{s}} = \frac{\eta_i^{\mathrm{s}}}{g_i} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, M \tag{6-73}$$

beschreiben das Verhältnis der Viskositäten η_i^{n} bzw. η_i^{s} der Dämpfer zu den Steifigkeiten k_i bzw. g_i der Federn in der i-ten MAXWELL-Kette – s. [P7912, S. 61, Gln. (3.3-7)] und vlg. Gl. (6-22)$_2$ bzw. Gl. (6-27)$_4$.

Die Steifigkeiten der MAXWELL-Ketten k_i, g_i und die Gleichgewichtssteifigkeiten k_∞, g_∞ werden durch die Beteiligungsfaktoren v_i^{n}, v_i^{s} und v_∞^{n}, v_∞^{s} ersetzt. Dafür werden jeweils die Gesamtsteifigkeiten k, g aus den Steifigkeiten der MAXWELL-Ketten k_i, g_i und Gleichgewichtssteifigkeiten k_∞, g_∞ berechnet zu

$$k = k_\infty + \sum_{i=1}^{M} k_i \quad \text{und} \quad g = g_\infty + \sum_{i=1}^{M} g_i \tag{6-74}$$

und anschließend aus der Reihe der Exponentialfunktionen ausgeklammert. Sie repräsentieren in Anlehnung an den instantanen Modul des räumlichen Kontinuums die instantane Steifigkeit der Kohäsivzone. Nach Ausklammern der instantanen Steifigkeiten erhalten die beiden Relaxationsfunktionen (6-72) jeweils die Form

$$R_{\mathrm{n}} = k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{\xi}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \quad \text{und} \quad R_{\mathrm{s}} = g \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \exp\left(-\frac{\xi}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right) \quad . \tag{6-75}$$

Analog folgt für die Gleichgewichtssteifigkeiten k_∞ und g_∞ im Tensor $\mathbf{K}_\infty$

$$k_\infty = k\, v_\infty^{\mathrm{n}} \quad \text{und} \quad g_\infty = g\, v_\infty^{\mathrm{s}} \quad . \tag{6-76}$$

Die Beteiligungsfaktoren repräsentieren dementsprechend die Steifigkeitsanteile der einzelnen Federn an der Gesamtsteifigkeit des generalisierten MAXWELL-Körpers und ergeben sich zu

$$v_i^{\mathrm{n}} = \frac{k_i}{k} \quad , \quad v_\infty^{\mathrm{n}} = \frac{k_\infty}{k} \quad \text{und} \quad v_i^{\mathrm{s}} = \frac{g_i}{g} \quad , \quad v_\infty^{\mathrm{s}} = \frac{g_\infty}{g} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, M \tag{6-77}$$

mit den Bedingungen $v_\infty^{\mathrm{n}} + \sum_i^M v_i^{\mathrm{n}} = 1$ und $v_\infty^{\mathrm{s}} + \sum_i^M v_i^{\mathrm{s}} = 1$. Die instantanen Steifigkeiten (6-74) der Grenzfläche lassen sich aus dem instantanen Modul unter Annahme der Querdehnungsbehinderung aus dem querdehnungsbehinderten Elastizitätsmodul E^* und dem instantanen Schubmodul G des dreidimensionalen Kontinuums mit der Klebschichtdicke d_{k} berechnen. Der Elastizitätsmodul für eine querdehnungsbehinderte Zugbeanspruchung E^{q} – s. [Hil63, S. 358] – geht aus dem Elastizitätsmodul E unter Annahme eines querdehnungsbehinderten Spannungszustands

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{(1-\nu)}\sigma_{xx} \end{bmatrix} \tag{6-78}$$

im räumlichen, linear elastischen Materialmodell mit

$$E^{\mathrm{q}} = E\,\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} = G\,\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} = K+\tfrac{4}{3}G \tag{6-79}$$

hervor. Die instantanen Steifigkeiten sind dann

$$k \approx \frac{E^{\mathrm{q}}}{d_{\mathrm{k}}} = \frac{1}{d_{\mathrm{k}}}\left(K+\frac{4}{3}G\right) \quad \text{und} \quad g \approx \frac{G}{d_{\mathrm{k}}} \quad . \tag{6-80}$$

Im Sinne der Beziehung (6-23) setzt sich der Spannungsvektor $\mathbf{t}$ additiv aus der Gleichgewichts- $\mathbf{t}^{\mathrm{eq}}$ und den Überspannungen $\mathbf{t}_i^{\mathrm{ov}}$ der MAXWELL-Körper zusammen.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^{\mathrm{eq}} + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{t}_i^{\mathrm{ov}} \tag{6-81}$$

In Analogie zur viskoelastischen Spannung (6-46) aus dem eindimensionalen rheologischen Netzwerk folgt für die Komponenten des Grenzflächenspannungsvektor $\mathbf{t}$ in Normal-, Tangetial- und Binormalrichtung

$$t_{\mathrm{n}} = k\int_0^t v_\infty^{\mathrm{n}}(p)\,\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + k\sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \int_0^{\xi(t)} \exp\left(-\frac{\xi(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right)\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-82}$$

$$t_{\mathrm{t}} = g\int_0^t v_\infty^{\mathrm{s}}(p)\,\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + g\sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \int_0^{\xi(t)} \exp\left(-\frac{\xi(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right)\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-83}$$

$$t_{\mathrm{b}} = g\int_0^t v_\infty^{\mathrm{s}}(p)\,\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + g\sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \int_0^{\xi(t)} \exp\left(-\frac{\xi(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right)\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \quad , \tag{6-84}$$

wobei die Komponenten der Gleichgewichtssteifigkeit $\mathbf{K}_\infty$ und der Relaxationsfunktion $\mathbf{R}$ in der Tangential- und Binormalenrichtung identisch sind. An dieser Stelle wird die Prozessabhängigkeit der Gleichgewichtssteifigkeiten k_∞ und g_∞ bzgl. des Aushärtegrads p in den Spannungen (6-82) bis (6-84) mithilfe prozessabhängiger Beteiligungsfaktoren $v_\infty^{\mathrm{n}}(p)$ und $v_\infty^{\mathrm{s}}(p)$ berücksichtigt, die im Laufe des Abschnitts definiert werden.

6.4.3 Thermorheologisch einfaches Materialverhalten
Thermorheologically simple material

Die Zeit-Temperaturverschiebung ist in der mechanischen Beschreibung des zeit- und temperaturabhängigen Verhaltens von Polymeren eine etablierte Methode – s. [Sch90], [FLO76], [Fer80]. Diese Methode reduziert die Anzahl der Variablen, indem ein Zusammenhang zwischen der Zeit und Temperatur ausgenutzt wird. Bei thermorheologisch einfachen Materialien wird in guter Näherung angenommen, dass lediglich die Visko-

sitäten bzw. Relaxationszeiten des Materials von der Temperatur abhängen und die Steifigkeit näherungsweise konstant bleiben. Die damit einhergehende Zeit-Temperatur-Verschiebung wird durch Einführung der prozessabhängigen reduzierten Zeit ξ im Konstitutivmodell gemäß den Ausführungen in Kapitel 6.3.2, S. 97 berücksichtigt. In der Literatur wird für die Funktion f_ξ zur Beschreibung der Prozessabhängigkeit der reduzierten Zeit ξ (6-35) häufig die Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion $a_\mathrm{T}(\theta)$ verwendet, die mit

$$\xi(\theta) = \int_0^t f_\xi(\theta(s))\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{a_\mathrm{T}(\theta(s))}\mathrm{d}s \tag{6-85}$$

als reziprok proportionale Funktion von f_ξ definiert wird – s. [FLO76, S. 106, Gl. (5.212)]. In der Polymermechanik ist die WILLIAMS-LANDEL-FERRY-Gleichung (WLF) in [Wil55, WLF55]

$$\ln a_\mathrm{T} = -\frac{C_1\,(\theta - \theta_\mathrm{R})}{C_2 + \theta - \theta_\mathrm{R}} \tag{6-86}$$

für die Zeit-Temperatur-Verschiebung im Glasübergangsbereich etabliert, da die Verringerung der Relaxationszeiten mit steigender Temperatur mit dem Freien Volumen zwischen den Molekülketten erklärt werden kann und das die Grundlage für die Herleitung der Funktion ist – s. [Fer80, S. 280 ff.]. In der WLF-Gleichung (6-86) sind $C_1 \geq 0$ und $C_2 \geq 0$ Materialparameter und die Temperatur

$$\theta_\infty := \theta_\mathrm{R} - C_2 \tag{6-87}$$

wird als VOGEL-Temperatur bezeichnet. Die VOGEL-Temperatur ist eine charakteristische Temperatur, bei der die WLF-Gleichung (6-86) eine Polstelle erster Ordnung aufweist – s. [Fer80, S. 276]. Unterhalb des Glasübergangsbereichs wird ein ARRHENIUS-Ansatz verwendet, der i. Allgem. der Beschreibung von temperaturabhängigen chemischen und physikalischen Prozessgeschwindigkeiten dient, bei denen auf molekularer

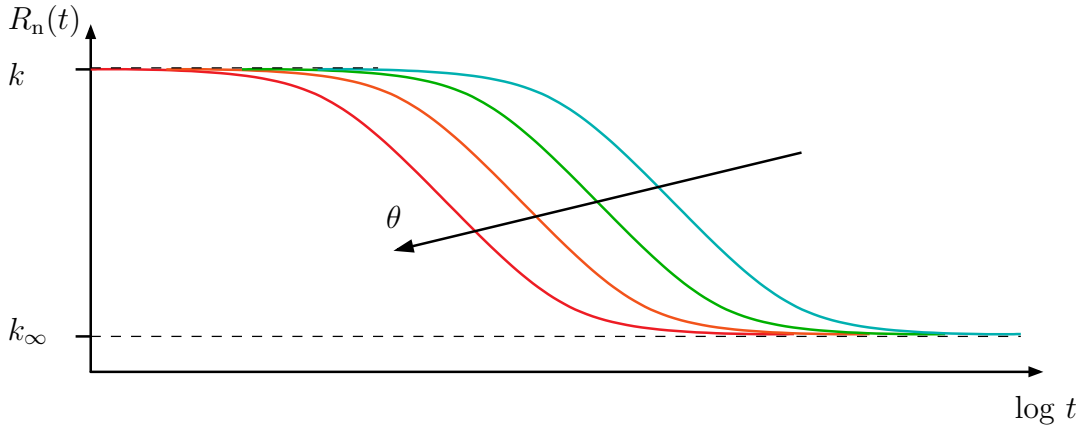


Abbildung 6-7: Qualitativer Verlauf der Relaxationsfunktion $R_\mathrm{n}(t)$ über der logarithmischen Zeitachse $\log t$ für thermorheologisch einfache Materialien bei verschiedenen Temperaturen θ
Figure 6-7: Qualitative course of relaxation function $R_\mathrm{n}(t)$ over logarithmic time scale $\log t$ of thermorheologically simple material for different temperatures θ

Ebene eine Aktivierungsenergie überwunden werden muss.

$$\ln a_{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{A}} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_{\mathrm{R}}} \right) \tag{6-88}$$

In der Viskoelastizitätstheorie wird in dreidimensionalen Modellen die Aufspaltung in den volumetrischen und deviatorischen Anteil vorgenommen. Dabei wird häufig angenommen, dass der volumetrische Anteil der Spannung linear elastisch ist und die Volumenrelaxation vernachlässigbar werden kann. Wenn die Volumenrelaxation nicht vernachlässigbar ist, folgt sowohl für den deviatorischen als auch für den volumetrischen Anteil der Spannung jeweils ein Faltungsintegral mit verschiedenen Kernfunktionen. Damit geht einher, dass für beide Faltungsintegrale jeweils eine Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion vorliegt, die die Relaxationszeiten in Abhängigkeit der Temperatur beschreiben. Für das Kohäsivzonenmodell wird daher postuliert, dass jeweils eine materielle Zeit für die Normal- ξ_{n} und beiden Schubkomponenten ξ_{s} des Spannungsvektors mit eigenen Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$ und $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$ existieren:

$$\xi_{\mathrm{n}} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}(\theta)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\xi_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{d}t}{a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}(\theta)} \quad , \quad \xi_{\mathrm{s}} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}(\theta)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\xi_{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{d}t}{a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}(\theta)} \quad . \tag{6-89}$$

Die Ergebnisse der Dynamisch-mechanischen Analysen für die Messmethoden „dual cantilever bending“ und „shear sandwich“ des LWF in Kapitel 4.2.1 zeigen, dass sich der Strukturklebstoff in guter Näherung thermorheologisch einfach verhält. Im Zuge der Identifikation der Relaxationsspektren für den zeitabhängigen Elastizitäts- $E(t)$ und Schubmodul $G(t)$ zeigt sich anhand der Versuchsdaten, dass je eine eigene Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion für eine adäquate Beschreibung des Zeit-Temperaturzusammenhangs beider Module definiert werden muss und die Annahme (6-89) gerechtfertigt ist. In beiden Fällen wird für die Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$ und $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$ oberhalb der jeweiligen Referenztemperaturen $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$ und $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$ die WILLIAMS-LANDEL-FERRY-Gleichung und unterhalb eine Gleichung vom ARRHENIUS-Typ gewählt. Die Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion zur Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit des Relaxationsmoduls in Normalenrichtung $R_{\mathrm{n}}(\xi_{\mathrm{n}})$ ist dann mit der Referenztemperatur $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$

$$a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}} = \begin{cases} \exp\left[E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{n}} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}} \right) \right] & \text{für} \quad \theta \leq \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}} \\ \exp\left[-\frac{C_1^{\mathrm{n}} \left(\theta - \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}} \right)}{C_2^{\mathrm{n}} + \theta - \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}} \right] & \text{für} \quad \theta > \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}} \end{cases} \tag{6-90}$$

mit dem Materialparameter der ARRHENIUS-Funktion $E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{n}}$ und den Parametern der WLF-Gleichung C_1^{n} und C_2^{n}. Analog folgt für die Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion – die auf die Relaxationsfunktion der Schubrichtungen $R_{\mathrm{s}}(\xi_{\mathrm{s}})$ über ξ_{s} wirkt –

$$a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}} = \begin{cases} \exp\left[E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{s}} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}} \right) \right] & \text{für} \quad \theta \leq \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} \\ \exp\left[-\frac{C_1^{\mathrm{s}} \left(\theta - \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} \right)}{C_2^{\mathrm{s}} + \theta - \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}} \right] & \text{für} \quad \theta > \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{6-91}$$

mit den Materialparametern $E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{s}}$, C_1^{s} und C_2^{s} sowie der Referenztemperatur $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$.

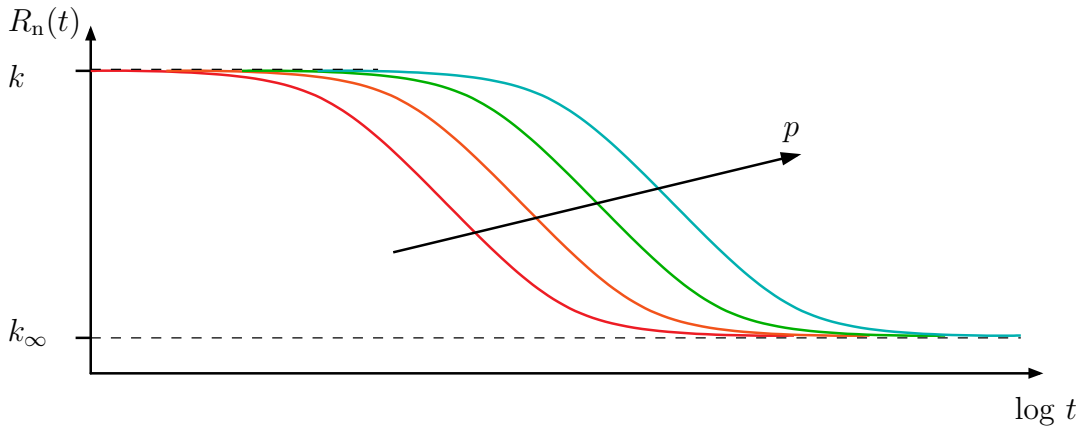


Abbildung 6-8: Qualitativer Verlauf der Relaxationsfunktion $R_\mathrm{n}(t)$ über der logarithmischen Zeitachse $\log t$ für chemorheologisch einfache Materialien bei verschiedenen Aushärtegraden p nach [AM96]
Figure 6-8: Qualitative course of relaxation function $R_\mathrm{n}(t)$ over logarithmic time scale $\log t$ of chemorheologically simple material for different degrees of cure p following [AM96]

6.4.4 Chemorheologisch einfaches Materialverhalten
Chemorheologically simple material

In [AM96, S. 22] wird das chemorheologisch einfache Materialverhalten erstmals erwähnt. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Aushärtegrad p zu einer Verschiebung der Relaxationsfunktion über der logarithmischen Zeitachse führt. Ähnlich dem thermorheologisch einfachen Materialverhalten weisen beim chemorheologisch einfachen Materialverhalten demnach alle Relaxationszeiten die selbe Abhängigkeit vom Aushärtegrad p auf. Abb. 6-8 zeigt die Verschiebung der zeitabhängigen Steifigkeit des Klebstoffs qualitativ am Beispiel der Relaxationsfunktion R_n. An dieser Stelle muss jedoch klargestellt werden, dass hier im Vergleich zur thermorheologischen Einfachheit nicht alle Steifigkeiten des Materials unabhängig vom Aushärtegrad sind. Vielmehr zeigen Klebstoffe im Zuge der Aushärtung ab dem Gelpunkt einen Phasenübergang vom Fluid in einen Festkörper, was mit dem Anwachsen des Gleichgewichtsmoduls in Abhängigkeit des steigenden Aushärtegrads während der Vernetzungsreaktion einhergeht und im Folgenden ausführlich diskutiert wird.

Gemäß eines Vorschlags von [AM96] kann der Einfluss der Vernetzungsreaktion auf die Relaxationszeiten $\hat{\tau}_i^\mathrm{n}$ und $\hat{\tau}_i^\mathrm{s}$ mit einem Ansatz berücksichtigt werden, bei dem der Aushärtegrad p indirekt in die Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen a_T^n und a_T^s eingebracht wird. Dabei werden die Referenztemperaturen $\theta_\mathrm{R}^\mathrm{n}$ und $\theta_\mathrm{R}^\mathrm{s}$ in den Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen (6-90) und (6-91) durch die Glasübergangstemperatur $\theta_\mathrm{g}(p)$ in Abhängigkeit des Aushärtegrads p ersetzt, die anhand kalorimetrischer Messung am Klebstoff mittels der Dynamischen Differenzkalorimetrie bestimmt wird – s. Kapitel 6.2.2. Für die Funktionen (6-90) und (6-91) folgt unter Anwendung des Ansatzes nach ADOLF und MARTIN

$$a_\mathrm{T}^\mathrm{n} = \begin{cases} \exp\left[E_\mathrm{A}^\mathrm{n}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta_\mathrm{g}(p)}\right)\right] & \forall\,\theta \le \theta_\mathrm{g} \\ \exp\left[-\frac{C_1^\mathrm{n}\left(\theta-\theta_\mathrm{g}(p)\right)}{C_2^\mathrm{n}+\theta-\theta_\mathrm{g}(p)}\right] & \forall\,\theta > \theta_\mathrm{g} \end{cases}, \quad a_\mathrm{T}^\mathrm{s} = \begin{cases} \exp\left[E_\mathrm{A}^\mathrm{s}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta_\mathrm{g}(p)}\right)\right] & \forall\,\theta \le \theta_\mathrm{g} \\ \exp\left[-\frac{C_1^\mathrm{s}\left(\theta-\theta_\mathrm{g}(p)\right)}{C_2^\mathrm{s}+\theta-\theta_\mathrm{g}(p)}\right] & \forall\,\theta > \theta_\mathrm{g} \end{cases}. \tag{6-92}$$

Die Vernetzungsreaktion beeinflusst die Relaxationszeiten $\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}$ und $\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}$ des Klebstoff durch die Änderung der Glasübergangstemperatur $\theta_{\mathrm{g}}(p)$ mit dem Aushärtegrad p als veränderliche Referenztemperatur der Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen (6-92), was eine starke Annahme in der Modellbildung darstellt. In [Men11] konnte bereits gezeigt werden, dass diese Annahme für die Berechnung von geklebten Proben unter quasistatisch zügigen Belastungen offenbar nicht zutrifft, da die Verschiebung der zeitabhängigen Steifigkeit bei niedrigen Aushärtegraden zu stark ist. In der Folge sind die Relaxationszeiten bei niedrigen Aushärtegraden zu gering, was zu einer Unterschätzung der Relaxationszeiten der Überspannungen im Konstitutivmodell und damit zur Unterschätzung der im Versuch gemessenen Kräfte an geklebten Proben mit teilausgehärteten Klebschichten führt – s. [Men11, S. 90 ff.].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird daher ein weiterer Ansatz untersucht, bei dem eigene Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen definiert werden, die in Anlehnung an die Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen (6-90) und (6-91) in den materiellen Zeiten (6-93) und (6-94) berücksichtigt werden. Unter der Annahme, dass sich während der Vernetzungsreaktion die Relaxationszeiten $\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}$ und $\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}$ des Klebstoffs verändern, wird gemäß der Definition der materiellen Zeit (6-35) der Aushärtegrad p als weitere Prozessgröße in der Funktion f_ξ berücksichtigt. Dabei werden die materiellen Zeiten ξ_{n} und ξ_{s} sinngemäß um die Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen $a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}(p)$ und $a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}(p)$ erweitert zu

$$\xi_{\mathrm{n}} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}(\theta)\, a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}(p)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\xi_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{d}t}{a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}(\theta)\, a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}(p)} \tag{6-93}$$

$$\xi_{\mathrm{s}} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}(\theta)\, a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}(p)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\xi_{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{d}t}{a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}(\theta)\, a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}(p)} \quad . \tag{6-94}$$

In [EBM$^+$00] wird eine Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktion vorgeschlagen, die auf der Grundlage von Messdaten aus Versuchen an teilausgehärtetem Epoxidharz definiert wird. Angelehnt an die Veröffentlichung von [EBM$^+$00] werden in der vorliegenden Arbeit für das Kohäsivzonenmodell die Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen

$$a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} = \begin{cases} \exp\left[a_3^{\mathrm{n}}\left(p - p_{\mathrm{gel}}\right) - a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{n}}\right] & \forall\, p < p_{\mathrm{gel}} \\ \exp\left[-a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{n}}\left(a_1^{\mathrm{n}}\right)^{(p-p_{\mathrm{gel}})}\left(\frac{p_{\mathrm{R}}-p}{p_{\mathrm{R}}-p_{\mathrm{gel}}}\right)^{a_2^{\mathrm{n}}}\right] & \forall\, p \geq p_{\mathrm{gel}} \end{cases} \tag{6-95}$$

$$a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}} = \begin{cases} \exp\left[a_3^{\mathrm{s}}\left(p - p_{\mathrm{gel}}\right) - a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{s}}\right] & \forall\, p < p_{\mathrm{gel}} \\ \exp\left[-a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{s}}\left(a_1^{\mathrm{s}}\right)^{(p-p_{\mathrm{gel}})}\left(\frac{p_{\mathrm{R}}-p}{p_{\mathrm{R}}-p_{\mathrm{gel}}}\right)^{a_2^{\mathrm{s}}}\right] & \forall\, p \geq p_{\mathrm{gel}} \end{cases} \tag{6-96}$$

definiert mit dem Referenzaushärtegrad $p_{\mathrm{R}} = 1$, dem Gelpunkt p_{gel}, den Verschiebungsfaktoren am Gelpunkt $a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{n}}$ und $a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{s}}$ sowie den Materialparametern a_1^{n}, a_1^{s}, a_2^{n}, a_2^{s} und a_3^{n}, a_3^{s}. EOM et al. stellen bei ihren Untersuchungen fest, dass die Exponenten a_2^{n} und a_2^{s} lineare Funktionen der Temperatur sein müssten, was im Rahmen dieser Arbeit jedoch aus

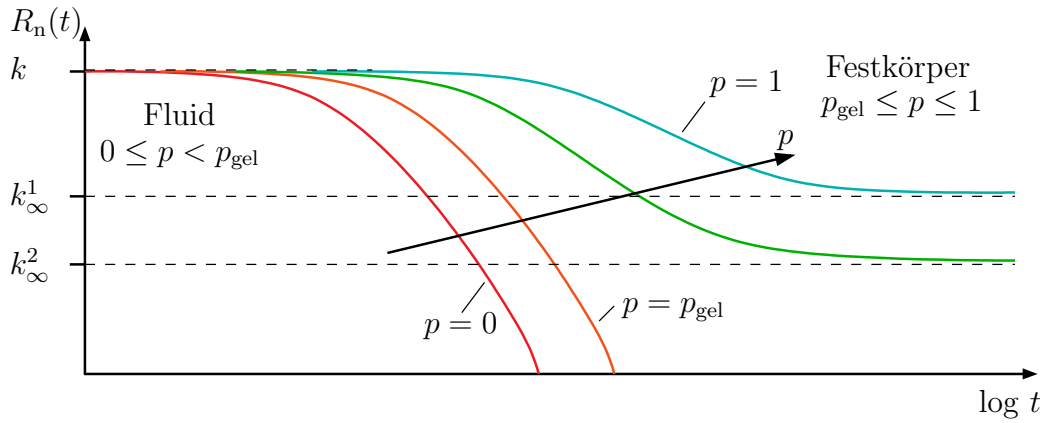


Abbildung 6-9: Qualitativer Verlauf der Relaxationsfunktion $R_\mathrm{n}(t)$ über der logarithmischen Zeitachse $\log t$ eines chemorheologisch einfachen Materials bei verschiedenen Aushärtegraden p nach [AM96] mit aushärtegradabhängiger Gleichgewichtssteifigkeit k_∞
Figure 6-9: Qualitative course of relaxation function $R_\mathrm{n}(t)$ over logarithmic time scale $\log t$ for different degrees of cure p following [AM96] with cure dependend equilibrium stiffness $k_\infty(p)$

Vereinfachungsgründen vernachlässigt werden muss. Am LWF wird die Verwendung der Verschiebungsfunktion (6-96) mithilfe der DMA unter Anwendung der Messmethode „shear sandwich“ an teilausgehärteten Proben für den vorliegenden Strukturklebstoff anhand des frequenzabhängigen Speicherschubmoduls $G'(\omega)$ verifiziert – siehe Kapitel 4.2.2. Im Rahmen der Projektlaufzeit können keine weiteren Versuche für die Parameteridentifikation und Verifikation der Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktion a_c^n (6-95) durchgeführt werden, weshalb die Materialparameter der beiden Funktionen (6-95) und (6-96) gleichgesetzt werden, sodass im Folgenden für die FE-Rechnungen $a_\mathrm{c} = a_\mathrm{c}^\mathrm{n} = a_\mathrm{c}^\mathrm{s}$ gilt.

6.4.5 Steifigkeiten in Abhängigkeit des Aushärteprozesses
Stiffness depending on cure process

Im Gegensatz zum thermorheologisch einfachen Materialverhalten sind die Steifigkeiten des Materials nicht unabhängig vom Vernetzungsfortschritt. Da der Klebstoff am Gelpunkt p_gel eine Phasenumwandlung vom flüssigen in den festen Zustand erfährt, entwickelt sich ab dort die Gleichgewichtsspannung $\mathbf{t}^\mathrm{eq}$ in Abhängigkeit des Aushärtegrads – s. Gl. (6-70). Diese Entwicklung geht auf die Veränderung der Gleichgewichtssteifigkeit (6-71) mit dem Aushärtegrad p während des Vernetzungsprozesses zurück. In [AM90] zeigen Experimente an einem Epoxidharz im Rheometer, dass sich der Gleichgewichtsschubmodul G_∞ überproportional mit dem Umsatzgrad während der Vernetzungsreaktion verändert. Dies wird mithilfe der Perkolationstheorie auf Basis makromolekularer Überlegungen bestätigt. In [AM96, Gl. (16)] wird auf Basis der Untersuchungen in [AM90] eine Funktion zur Beschreibung des Gleichgewichtsschubmoduls $G_\infty(p)$ als

Funktion des Aushärtegrads p vorgeschlagen, die im Folgenden mit der MACAULEY-Klammer [19] modifiziert wird[20]:

$$G_\infty = \hat{G}_\infty \left(\frac{\left\langle p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2 \right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2} \right)^{\frac{8}{3}} \tag{6-98}$$

In Gl. (6-98) ist $\hat{G}_\infty$ der Gleichgewichtsmodul des vollständig Ausgehärteten Klebstoffs für $p = 1$. Formal mathematisch trägt die MACAULEY-Klammer der Forderung Rechnung, einen mathematisch unbestimmten Ausdruck im Gleichgewichtsmodul (6-98) für den Fall $p < p_{\mathrm{gel}}$ – wo der Radikand der Potenzfunktion kleiner null ist – zu vermeiden. Damit wird garantiert, dass der Gleichgewichtsmodul unterhalb des Gelpunkts identisch null ist. Dieser Ansatz ist bspw. in den Arbeiten [MdBS$^+$04], [Jen04], [Mah13], [P8714] und [Lie14] für die Berechnung unterschiedlicher Problemstellungen im Zusammenhang mit Epoxidharzen verwendet worden. In Analogie zum Gleichgewichtsmodul (6-98) werden für das Kohäsivzonenmodell die Gleichgewichtssteifigkeiten $k_\infty(p)$ und $g_\infty(p)$ als Funktionen des Aushärtegrads p mit den Gleichgewichtssteifigkeiten des vollständig ausgehärteten Klebstoffs $\hat{k}_\infty$ und $\hat{g}_\infty$ sowie dem Gelpunkt p_{gel} definiert:

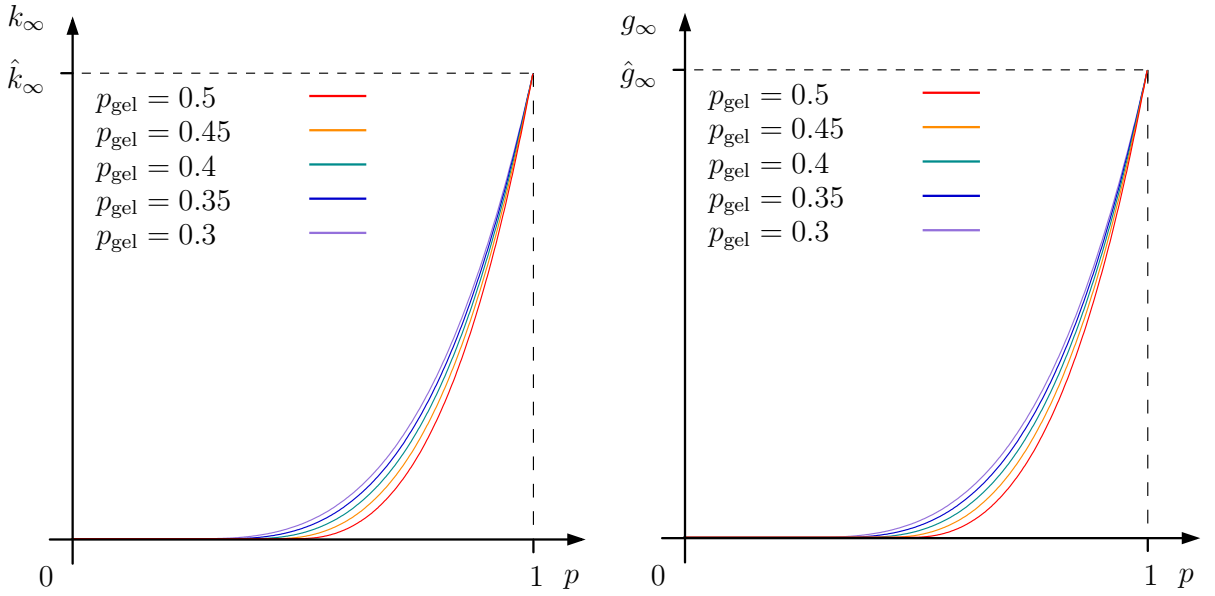
$$k_\infty = \hat{k}_\infty \left(\frac{\left\langle p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2 \right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2} \right)^{\frac{8}{3}} \quad \text{und} \quad g_\infty = \hat{g}_\infty \left(\frac{\left\langle p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2 \right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2} \right)^{\frac{8}{3}} \quad . \tag{6-99}$$

Die Abb. 6-9 zeigt die Kurvenschar der zeitabhängigen Steifigkeit R_{n} über der logarithmischen Zeitachse $\log t$ für verschiedene Aushärtegrade zwischen $p = 0$ und $p = 1$ qualitativ. Im Diagramm werden die Verschiebung der Steifigkeit entlang der Zeitachse sowie die Erhöhung der Gleichgewichtssteifigkeit $k_\infty(p)$ ab dem Gelpunkt p_{gel} mit steigendem Aushärtegrad p verdeutlicht und die Unterschiede im Verlauf der Steifigkeit in der flüssigen und festen Phase veranschaulicht.
In den Abbn. 6-10(a) und 6-10(b) sind die Steifigkeiten k_∞ und g_∞ jeweils als Kurvenschar für verschiedene Gelpunkte p_{gel} als Funktionen des Aushärtegrads p dargestellt. Der Verlauf der Steifigkeiten über dem Aushärtegrad wird lediglich vom Gelpunkt p_{gel} und den Steifigkeiten des vollständig ausgehärteten Klebstoffs $\hat{k}_\infty$ und $\hat{g}_\infty$ beeinflusst, da der Exponent mit $8/3$ fest ist – s. [AM96, Gl. (16)]. Die MACAULEY-Klammer bewirkt, dass die beiden Steifigkeiten erst ab dem Gelpunkt p_{gel} von Null verschieden sind und ab dort mit wachsendem Aushärtegrad $p(t)$ in der Zeit t ansteigen.
Das viskoelastische Kohäsivzonenmodell im Netzwerk 6-6 (rechts) geht aufgrund der Gleichgewichtssteifigkeiten (6-99) ab dem Gelpunkt p_{gel} vom generalisierten Fluid in

[19] MACAULEY-Klammer bzw. Föppl-Operator bzw. -Klammer:

$$\langle x \rangle := \frac{1}{2}(x + |x|) = \begin{cases} x & \text{für} x > 0 \\ 0 & \text{für} x \leq 0 \end{cases} \tag{6-97}$$

[20] Der Ansatz ist gemäß [AM96, S. 21] für chemisch vernetzende Polymere mit geringem molekularen Gewicht wie bspw. Epoxidharz und Polyurethan geeignet und wird im Rahmen dieser Arbeit für den Klebstoff auf Epoxidharzbasis trotz der Duktilmodifizierung mit Gummipartikeln verwendet.



(a) Gleichgewichtszugsteifigkeit (b) Gleichgewichtsschubsteifigkeit

Abbildung 6-10: Gleichgewichtszug- (a) und Gleichgewichtsschubsteifigkeit (b) für verschiedene Gelpunkte $p_{\mathrm{gel}} = 0.5, 0.45, 0.4, 0.35$ und 0.3 als Funktionen des Aushärtegrads p
Figure 6-10: Equilibrium normal and shear stiffness for gel points $p_{\mathrm{gel}} = 0.5, 0.45, 0.4, 0.35$ and 0.3 as functions of degree of cure p

den Festkörper vom MAXWELL-Typ über und enthält damit die Umwandlung von der flüssigen in die feste Phase.

An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass sich der Klebstoff in der flüssigen Phase keinesfalls linear viskos bzw. linear viskoelastisch verhält, sondern vielmehr eine nichtlineare Beziehung zwischen Spannung und Dehnrate aufweist. Der Fokus der Arbeit liegt jedoch nicht in der Beanspruchungsanalyse des flüssigen Klebstoffs, sondern vielmehr in der Analyse des mechanischen Verhaltens der Klebverbindung nach überschreiten des Gelpunkts.

Für die Beteiligungsfaktoren v_∞^{n} und v_∞^{s} in den Faltungsintegralen (6-103) bis (6-105) folgt unter Berücksichtigung der aushärtegradabhängigen Steifigkeiten (6-99)

$$v_\infty^{\mathrm{n}}(p) = \frac{k_\infty(p)}{k} = \frac{\hat{k}_\infty}{k}\left(\frac{\left\langle p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2\right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2}\right)^{\frac{8}{3}} = \hat{v}_\infty^{\mathrm{n}}\left(\frac{\left\langle p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2\right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2}\right)^{\frac{8}{3}} \tag{6-100}$$

$$v_\infty^{\mathrm{s}}(p) = \frac{g_\infty(p)}{g} = \frac{\hat{g}_\infty}{g}\left(\frac{\left\langle p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2\right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2}\right)^{\frac{8}{3}} = \hat{v}_\infty^{\mathrm{s}}\left(\frac{\left\langle p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2\right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2}\right)^{\frac{8}{3}} \tag{6-101}$$

mit den Beteiligungsfaktoren des vollständig ausgehärteten Klebstoffs $\hat{v}_\infty^{\mathrm{n}} := \frac{\hat{k}_\infty}{k}$ und $\hat{v}_\infty^{\mathrm{s}} := \frac{\hat{g}_\infty}{g}$ unter der Voraussetzung, dass k und g die instantanen Steifigkeiten für den vollständig ausgehärteten Klebstoffs sind. Die instantanen Steifigkeiten (6-74) sind dann

unter Berücksichtigung der Gleichgewichtssteifigkeiten (6-99)

$$k = \hat{k}_\infty + \sum_{i=1}^{M} k_i \quad \text{und} \quad g = \hat{g}_\infty + \sum_{i=1}^{M} g_i \tag{6-102}$$

mit den Gleichgewichtssteifigkeiten $\hat{k}_\infty$ und $\hat{g}_\infty$ des vollständig ausgehärteten Klebstoffs für $p = 1$. Bei der Verwendung der prozessabhängigen Beteiligungsfaktoren muss die Einhaltung der Bedingungen $0 \leq v_\infty^{\mathrm{n}}(p), v_\infty^{\mathrm{s}}(p) \leq 1$ und $v_\infty^{\mathrm{n}} + \sum_i^M v_i^{\mathrm{n}} \leq 1$ und $v_\infty^{\mathrm{s}} + \sum_i^M v_i^{\mathrm{s}} \leq 1$ gewährleistet sein. Für den vollständig ausgehärteten Klebstoff $p = 1$ müssen $v_\infty^{\mathrm{n}} + \sum_i^M v_i^{\mathrm{n}} = 1$ und $v_\infty^{\mathrm{s}} + \sum_i^M v_i^{\mathrm{s}} = 1$ mit $v_\infty^{\mathrm{n}} = \hat{v}_\infty^{\mathrm{n}}$ und $v_\infty^{\mathrm{s}} = \hat{v}_\infty^{\mathrm{s}}$ gelten.
Für den Spannungsvektor folgt dann mit den reduzierten Zeiten:

$$t_{\mathrm{n}} = k \int_0^t v_\infty^{\mathrm{n}}(p) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \int_0^{\xi_{\mathrm{n}}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_{\mathrm{n}}(t) - \tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-103}$$

$$t_{\mathrm{t}} = g \int_0^t v_\infty^{\mathrm{s}}(p) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + g \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \int_0^{\xi_{\mathrm{s}}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_{\mathrm{s}}(t) - \tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-104}$$

$$t_{\mathrm{b}} = g \int_0^t v_\infty^{\mathrm{s}}(p) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + g \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \int_0^{\xi_{\mathrm{s}}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_{\mathrm{s}}(t) - \tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \quad . \tag{6-105}$$

6.4.6 Relaxationsfunktionen im Referenzzustand
Relaxation functions in the reference condition

Das temperatur- und aushärtegradabhängige viskoelastische Materialverhalten wird im Folgenden in einem Referenzzustand identifiziert. Bei der Verwendung des Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzips wird im Zuge der Identifikation jeweils eine Referenztemperatur für die Normal- $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$ und Schubbeanspruchung $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$ gewählt – s. Gln. (6-91) und (6-90). Das temperaturabhängige Materialverhalten wird an Messdaten aus Versuchen an vollständig ausgehärteten Proben untersucht und angepasst – s. Kapitel 4.2.1 und Kapitel 7.1 –, so dass der Referenzaushärtegrad $p_{\mathrm{R}} = 1$ ist. Im Referenzzustand $p = p_{\mathrm{R}}$ und $\theta = \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$ bzw. $\theta = \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$ folgt für die Komponenten des Spannungsvektors (6-103) bis (6-105) jeweils

$$t_{\mathrm{n}}(\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}, p_{\mathrm{R}}) = \int_0^t k \left[\hat{v}_\infty^{\mathrm{n}} + \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right)\right] \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-106}$$

$$t_{\mathrm{t}}(\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}, p_{\mathrm{R}}) = \int_0^t g \left[\hat{v}_\infty^{\mathrm{s}} + \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right)\right] \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-107}$$

$$t_{\mathrm{t}}(\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}, p_{\mathrm{R}}) = \int_0^t g \left[\hat{v}_\infty^{\mathrm{s}} + \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right)\right] \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-108}$$

unter Beachtung der Referenzzustände $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}(\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}) = 1$ und $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}(\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}) = 1$ der Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen (6-90) und (6-91), womit gemäß Gl. (6-36) für die materiellen

Zeiten (6-89) jeweils $\xi_{\mathrm{n}}(\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}) = t$ und $\xi_{\mathrm{s}}(\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}) = t$ gilt. Für die Faltungsintegrale (6-106) bis (6-108) werden die Relaxationsfunktionen der Referenzzustände in die Normalenrichtung $\tilde{R}_{\mathrm{n}}$ und Schubrichtungen $\tilde{R}_{\mathrm{s}}$ mit

$$\tilde{R}_{\mathrm{n}} = k\left[\hat{v}_{\infty}^{\mathrm{n}} + \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right)\right] = \hat{k}_{\infty} + \sum_{i=1}^{M} k_i \exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \tag{6-109}$$

$$\tilde{R}_{\mathrm{s}} = g\left[\hat{v}_{\infty}^{\mathrm{s}} + \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right)\right] = \hat{g}_{\infty} + \sum_{i=1}^{M} g_i \exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \tag{6-110}$$

definiert und in Kapitel 7.1 zur Identifikation des thermo-chemo-viskoelastischen Materialverhalten des Kohäsivzonenmodells herangezogen.

Tabelle 6-3: Zusammenstellung der Konstitutivgleichungen des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells
Table 6-3: Compilation of the constitutive equations of the viscoelastic cohesive zone model

Bezeichnung	Materialgleichung	Materialparameter
Normalspannung	$t_\mathrm{n} = k \int_0^t v_\infty^\mathrm{n}(p)\, \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{n}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau +$ $+k \sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{n} \int_0^{\xi_\mathrm{n}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_\mathrm{n}(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{n}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{n}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau$	k $v_i^\mathrm{n},\ \hat{\tau}_i^\mathrm{n}$
Tangential- und Binormalspannung	$t_\mathrm{t} = g \int_0^t v_\infty^\mathrm{s}(p)\, \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{b}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau +$ $+g \sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{s} \int_0^{\xi_\mathrm{s}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_\mathrm{s}(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{s}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{t}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau$ $t_\mathrm{b} = g \int_0^t v_\infty^\mathrm{s}(p)\, \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{b}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau +$ $+g \sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{s} \int_0^{\xi_\mathrm{s}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_\mathrm{s}(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{s}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{b}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau$	g $v_i^\mathrm{s},\ \hat{\tau}_i^\mathrm{s}$
Beteiligungsfaktoren der Gleichgewichtssteifigkeiten	$v_\infty^\mathrm{n}(p) = \hat{v}_\infty^\mathrm{n} \left(\frac{\left\langle p^2 - p_\mathrm{gel}^2 \right\rangle}{1 - p_\mathrm{gel}^2} \right)^{\frac{8}{3}}$ $v_\infty^\mathrm{s}(p) = \hat{v}_\infty^\mathrm{s} \left(\frac{\left\langle p^2 - p_\mathrm{gel}^2 \right\rangle}{1 - p_\mathrm{gel}^2} \right)^{\frac{8}{3}}$	$\hat{v}_\infty^\mathrm{n},\ p_\mathrm{gel}$ $\hat{v}_\infty^\mathrm{s}$
Materielle Zeiten	$\xi_\mathrm{n} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a_\mathrm{T}^\mathrm{n}(\theta)\, a_\mathrm{c}^\mathrm{n}(p)} \quad , \quad \xi_\mathrm{s} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a_\mathrm{T}^\mathrm{s}(\theta)\, a_\mathrm{c}^\mathrm{s}(p)}$	
ZTV-Funktionen	$a_\mathrm{T}^\mathrm{n} = \begin{cases} \exp\left[E_\mathrm{A}^\mathrm{n} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_\mathrm{R}^\mathrm{n}} \right) \right] & \text{für} \quad \theta \le \theta_\mathrm{R}^\mathrm{n} \\ \exp\left[-\frac{C_1^\mathrm{n}\left(\theta - \theta_\mathrm{R}^\mathrm{n}\right)}{C_2^\mathrm{n} + \theta - \theta_\mathrm{R}^\mathrm{n}} \right] & \text{für} \quad \theta > \theta_\mathrm{R}^\mathrm{n} \end{cases}$ $a_\mathrm{T}^\mathrm{s} = \begin{cases} \exp\left[E_\mathrm{A}^\mathrm{s} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_\mathrm{R}^\mathrm{s}} \right) \right] & \text{für} \quad \theta \le \theta_\mathrm{R}^\mathrm{s} \\ \exp\left[-\frac{C_1^\mathrm{s}\left(\theta - \theta_\mathrm{R}^\mathrm{s}\right)}{C_2^\mathrm{s} + \theta - \theta_\mathrm{R}^\mathrm{s}} \right] & \text{für} \quad \theta > \theta_\mathrm{R}^\mathrm{s} \end{cases}$	$E_\mathrm{A}^\mathrm{n},\ C_1^\mathrm{n},\ C_2^\mathrm{n},$ $\theta_\mathrm{R}^\mathrm{n}$ $E_\mathrm{A}^\mathrm{s},\ C_1^\mathrm{s},\ C_2^\mathrm{s},$ $\theta_\mathrm{R}^\mathrm{s}$
ZAV-Funktionen	$a_\mathrm{c}^\mathrm{n} = \begin{cases} \exp\left[a_3^\mathrm{n} \left(p - p_\mathrm{gel} \right) - a_\mathrm{gel}^\mathrm{n} \right] & \forall\, p < p_\mathrm{gel} \\ \exp\left[-a_\mathrm{gel}^\mathrm{n} \left(a_1^\mathrm{n} \right)^{(p - p_\mathrm{gel})} \left(\frac{p_\mathrm{R} - p}{p_\mathrm{R} - p_\mathrm{gel}} \right)^{a_2^\mathrm{n}} \right] & \forall\, p \ge p_\mathrm{gel} \end{cases}$ $a_\mathrm{c}^\mathrm{s} = \begin{cases} \exp\left[a_3^\mathrm{s} \left(p - p_\mathrm{gel} \right) - a_\mathrm{gel}^\mathrm{s} \right] & \forall\, p < p_\mathrm{gel} \\ \exp\left[-a_\mathrm{gel}^\mathrm{s} \left(a_1^\mathrm{s} \right)^{(p - p_\mathrm{gel})} \left(\frac{p_\mathrm{R} - p}{p_\mathrm{R} - p_\mathrm{gel}} \right)^{a_2^\mathrm{s}} \right] & \forall\, p \ge p_\mathrm{gel} \end{cases}$	$a_\mathrm{gel}^\mathrm{n},\ a_1^\mathrm{n},\ a_2^\mathrm{n},$ $a_3^\mathrm{n},\ p_\mathrm{R}$ $a_\mathrm{gel}^\mathrm{s},\ a_1^\mathrm{s},\ a_2^\mathrm{s},$ a_3^s

6.5 Thermo-chemische Verschiebungsdiskontinuität Thermo-chemical displacement jump

Aufgrund von Temperaturänderungen ändert sich das Volumen der Klebschicht. Dabei sind zwei Effekte teilweise gegenläufig, wenn es sich in der Klebschicht um einen un- bzw. teilvernetzten Klebstoff handelt. Ein Effekt ist die Dilation des Klebstoffs aufgrund einer Temperaturerhöhung. Wenn die Temperatur oberhalb der Glasübergangstemperatur ist, findet die Vernetzungsreaktion im Klebstoff statt, die zur Verringerung dessen Volumens führt. Die Grenzflächenformulierung des Konstitutivmodells schließt eine Volumenänderung aus, da hier nur die Relativverschiebungen zwischen den Substraten betrachtet werde. Im Fall flächiger Klebungen mit dünnen Klebschichten wird unter Anwendung der Grenzflächentheorie die Volumenänderung in guter Näherung vernachlässigt, jedoch soll die thermisch bzw. chemisch hervorgerufene Abstandsänderung normal zur Grenzfläche berücksichtigt werden. In Anlehnung an die Änderung des volumetrischen Anteils des Dehnungstensors $\mathbf{E}^{\mathrm{K}} = \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\,(\mathbf{E})\,\mathbf{1}$ wird im Fall der Grenzfläche eine thermochemische (tc) Verschiebungsdiskontinuität in Richtung der Flächennormalen $\mathbf{e}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\top}$ postuliert, die sich additiv aus einem thermischen (th) und einem chemischen (ch) Anteil zusammensetzt:

$$\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{tc}} = \Delta^{\mathrm{tc}}\,\mathbf{e}_{\mathrm{n}} = \left(\Delta^{\mathrm{th}} + \Delta^{\mathrm{ch}}\right)\,\mathbf{e}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}} + \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ch}} \tag{6-111}$$

6.5.1 Thermische Verschiebungsdiskontinuität Thermal displacement jump

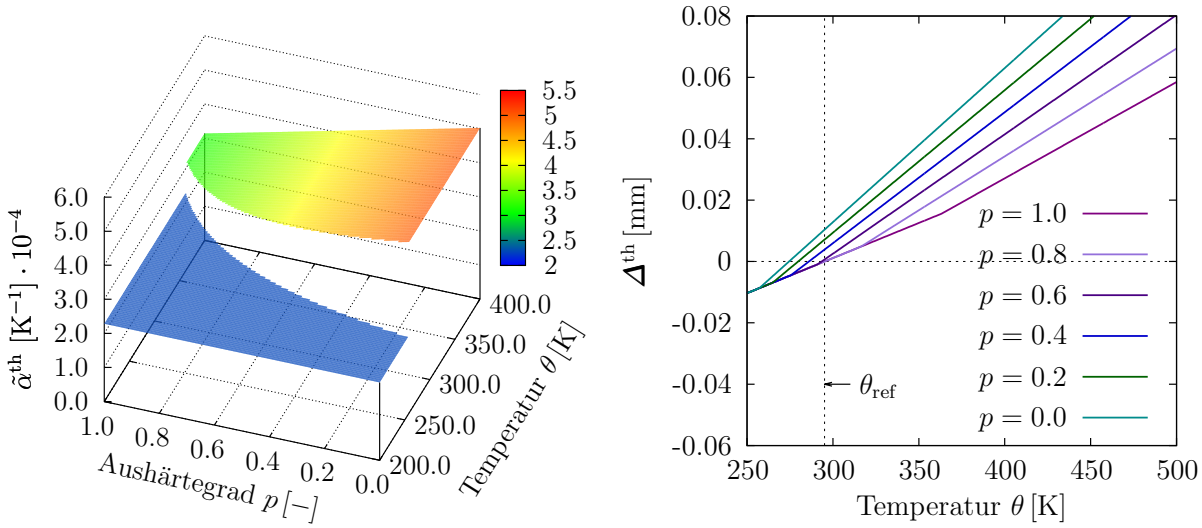
In Analogie zur thermischen Dehnrate (6-16) wird für die Kohäsivzone eine thermische Verschiebungsdiskontinuität eingeführt, die die thermisch induzierte Verschiebung der Klebschicht $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}}$ in Richtung der Flächennormalen $\mathbf{e}_{\mathrm{n}}$ beschreibt:

$$\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{th}}(\theta, p) = \tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta, p)\, d_{\mathrm{k}}\, \dot{\theta}\, \mathbf{e}_{\mathrm{n}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\top} \tag{6-112}$$

Die Rate des lokalen thermischen Verschiebungssprungs (6-112) ist analog zur thermischen Dehnung Gl. (6-43) proportional zur Temperaturänderung $\dot{\theta}$ mit der Klebschichtdicke d_{k} und dem Wärmeausdehnungskoeffizient $\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}$, der sich ab der Glasübergangstemperatur θ_{g} ändert und oberhalb dieser vom Aushärtegrad p abhängt.

$$\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta, p) = \begin{cases} \alpha_1^{\mathrm{th}} & \text{für} \quad \theta < \theta_{\mathrm{g}} \\ \alpha_2^{\mathrm{th}} + (\alpha_3^{\mathrm{th}} - \alpha_2^{\mathrm{th}})(1-p) & \text{für} \quad \theta \geq \theta_{\mathrm{g}} \end{cases} \tag{6-113}$$

In Gl. (6-113) ist α_1^{th} der Wärmeausdehnungskoeffizient unterhalb der Glasübergangstemperatur, α_2^{th} oberhalb der Glasübergangstemperatur bei vollständiger Aushärtung $p = 1$ und α_3^{th} oberhalb der Glasübergangstemperatur für unvernetztes Material $p = 0$ – s. Gl. (6-43). In Abb. 6-11(a) ist der Wärmeausdehnungskoeffizient $\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ über dem Aushärtegrad p und der Temperatur θ dargestellt. Abb. 6-11(b) zeigt die Schar der thermischen Verschiebungssprünge $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}}$ für verschiedene Aushärtegrade $p = 0.0$, $0.2\,, \ldots, 1.0$. Der thermische Verschiebungssprung ist vor Erreichen der Glasübergangstemperatur θ_{g} unabhängig vom Aushärtegrad. Nach Überschreiten der Glasübergangs-



(a) Wärmeausdehnungskoeffizient $\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$

(b) Verlauf der thermischen Verschiebungsdiskontinuität $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}}$ für verschiedene Aushärtegrade p

Abbildung 6-11: (a) Wärmeausdehnungskoeffizient $\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ und (b) Temperaturverschiebung $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ als Funktionen der Temperatur θ und des Aushärtegrads p
Figure 6-11: (a) thermal expansion coefficient $\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ and (b) thermal displacement jump $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}}(\theta, p)$ as functions of temperature θ and degree of cure p

temperatur ändert sich der Wärmeausdehnungskoeffizient $\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}$ sowohl für festen Aushärtegrad p als auch in Abhängigkeit von diesem. Dabei nimmt der Wärmeausdehnungskoeffizient mit steigendem Aushärtegrad ab.

6.5.2 Chemische Verschiebungsdiskontinuität
Chemical displacement jump

Der Einfluss der Schrumpfung des Klebstoffs aufgrund der Vernetzung des Strukturklebstoffs soll im Folgenden auch im Kohäsivzonenmodell berücksichtigt werden. Daher wird analog zum thermischen Verschiebungssprung ein chemischer Verschiebungssprung definiert, der sich in Abhängigkeit des Aushärtegrad p in Richtung der Flächennormalen auf der Grenzfläche verändert.

Für den betrachteten Klebstoff *EP 1* wird von Liebl und Lion in [P8714, S. 132, Gl. (4.14)] und [Lie14, S. 93, Gln. (6.22)] anhand von Messungen an Klebstoffsubstanzproben mithilfe des archimedischen Prinzips unter Berücksichtigung der überlagerten thermischen Volumendehnung während der Warmhärtung des Klebstoffs eine Volumendehnung vorgeschlagen, die sich quadratisch mit dem Aushärtegrad p ändert. Auf Wunsch des projektbegleitenden Ausschusses wird dieser Ansatz aus dem Projekt P 878 hier weiter verfolgt. Für die Verschiebungsdiskontinuität ergibt sich unter Berücksichtigung einer Dehnungskomponente der Volumendehnung des Ansatzes aus P 878

$$\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ch}} = \frac{d_{\mathrm{k}}}{3}\left(\hat{\beta}_2\, p - \hat{\beta}_1\, p^2\right)\mathbf{e}_{\mathrm{n}} \tag{6-114}$$

unter der Voraussetzung, dass sich die Dicke der Kohäsivzone in Abhängigkeit des Aushärtegrads p in Richtung der Flächennormalen $\mathbf{e}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\top}$ ändert.

6.6 Thermo-chemo-plastisches Kohäsivzonenmodell Thermo-chemo-plastic cohesive zone model

6.6.1 Kontinuumsschädigungsmechanik Continuum damage mechanics

Die Schädigung des Klebstoffs infolge einer stetigen Belastung wird in Anlehnung an [Mur12, S. 16 – 18] anhand eines Stabs motiviert. Im Ausgangszustand hat das betrachtete Material keine Belastungsvorgeschichte und die Ausgangsquerschnittsfläche A_0 ist defektfrei – s. Abb. 6-12 (links). Die Belastung des Stabs mit der Kraft F hat im Stab mit der Querschnittsfläche A die Spannung σ zur Folge, die neben der Querkontraktion des Stabquerschnitts auch für die Entstehung von Mikrodefekten in Form von Poren verantwortlich ist – s. Abb. 6-12 (Mitte). Bei Betrachtung des Stabquerschnitts mit der aktuellen Fläche A im physikalischen Raum sind die Poren als Teilflächen interpretierbar, die in Summe die Defektfläche A_d einnehmen. Die Schädigung des Materials wird dann mit dem Verhältnis zwischen der Defektfläche A_d und aktuellen Fläche A in Form der Schädigungsvariable D motiviert:

$$D = \frac{A_\mathrm{d}}{A} \quad . \tag{6-115}$$

Die Schädigungsvariable D beschreibt die irreversible Abnahme der materiellen Integrität und geht auf die Arbeit von [Kac99] zurück, der die Kontinuität Ψ_d eingeführt hat, die als Verhältnis zwischen der effektiv tragenden Fläche $\hat{A} = A - A_\mathrm{d}$ und der aktuellen Fläche A mit

$$\Psi_\mathrm{d} = \frac{\hat{A}}{A} = \frac{A - A_\mathrm{d}}{A} = 1 - D \tag{6-116}$$

am Stab 6-12 motiviert werden kann. Die Schädigungsvariable D ist im Fall des defekfreien Materials ohne Defektfläche $D = 0$. Das Material ist vollständig geschädigt für $D = 1$, wenn die Defektfläche A_d den gesamten Querschnitt einnimmt und das Material getrennt ist. Damit kann die Schädigungsvariable D mit dem abnehmen der effektiv tragenden Fläche

$$\hat{A} = A - A_\mathrm{d} = (1 - D)A \tag{6-117}$$

aufgrund der Zunahme der Defektfläche A_d infolge der Bildung von Mikrorissen sowie Kavitation im Material interpretiert werden. Im effektiven Spannungsraum wird die äußere Belastung F auf die effektive Querschnittsfläche $\hat{A}$ bezogen gemäß des Konzepts der effektiven Spannung $\hat{\sigma}$ nach [Rab63] – s. Abb. 6-12 (rechts). Im effektiven Raum ist die Schädigung $D = 0$, da hier

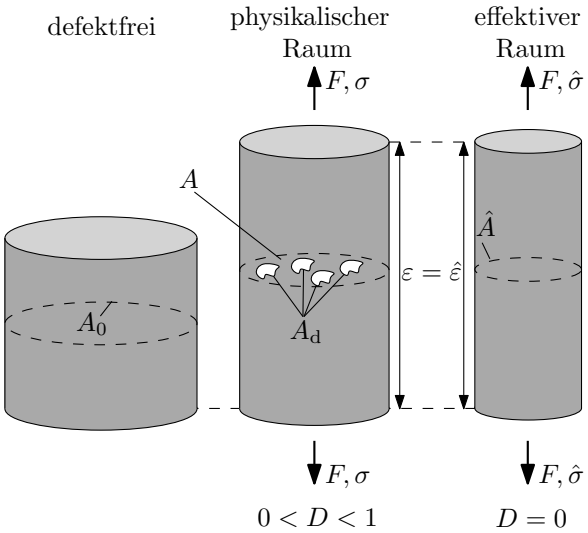


Abbildung 6-12: Motivation der Schädigung: defektfreier Körper ohne Belastungsgeschichte (links), defektbehafteter Körper im physikalischen Raum (Mitte) und schädigungsfreies Material im effektiven Raum (rechts)

Figure 6-12: Motivation of Damage: defect free body without loading (left), defect body in the physical space (middle) and undamaged material in the effective space Raum (right)

die Last F auf die bereits um die Defektfläche A_d reduzierte effektive Fläche $\hat{A}$ bezogen wird[21]. Aus dem Kräftegleichgewicht zwischen physikalischem und effektivem Raum folgt mit der Beziehung (6-117)

$$F = \sigma A = \hat{\sigma}\hat{A} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\sigma} = \frac{F}{\hat{A}} = \frac{\sigma A}{\hat{A}} = \frac{\sigma}{1-D} \tag{6-118}$$

mit der nominellen Spannung $\sigma = F/A$. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Dehnungsäquivalenzprinzip verwendet, um eine Verbindung zwischen dem physikalischen und effektiven Raum herzustellen. Beim Dehnungsäquivalenzprinzip wird angenommen, dass die Dehnung am defektbehafteten Material im physikalischen Raum mit der Dehnung des ungeschädigten Materials im effektiven Raum identisch ist, womit $\varepsilon \equiv \hat{\varepsilon}$ gilt – s. [Mur12, S. 36 f.] und die dort zitierte Literatur von Lemaître und Chaboch. Der Spannungszustand σ des geschädigten Körpers mit der Querschnittsfläche A ist dann mechanisch äquivalent zum effektiven Spannungszustand $\hat{\sigma}$ des fiktiv ungeschädigten Körpers mit der effektiven Querschnittsfläche $\hat{A}$.
Die aufgeführten Zusammenhänge lassen sich analog auf den räumlichen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ übertragen und für die effektive Spannung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ folgt dann

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\Psi_\mathrm{d}} \quad . \tag{6-119}$$

Aus dem lokalen Spannungsvektor der Grenzfläche $\mathbf{t}$ folgt analog zur Beziehung (6-119) der effektive Spannungsvektor

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}}{1-D} = \frac{\mathbf{t}}{\Psi_\mathrm{d}} \quad . \tag{6-120}$$

Die Spannungen (6-103) bis (6-105) sind im Sinne von Gl. (6-120) zunächst effektive Spannungen $\hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \hat{t}_\mathrm{n} & \hat{t}_\mathrm{t} & \hat{t}_\mathrm{b} \end{bmatrix}^\top$ und das Konstitutivmodell wird zunächst im effektiven Raum definiert mit

$$\begin{aligned}
\hat{t}_\mathrm{n} &= k \int_0^t v_\infty^\mathrm{n}(p)\, \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{n}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau + k \sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{n} \int_0^{\xi_\mathrm{n}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_\mathrm{n}(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{n}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{n}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau \\
\hat{t}_\mathrm{t} &= g \int_0^t v_\infty^\mathrm{s}(p)\, \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{b}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau + g \sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{s} \int_0^{\xi_\mathrm{s}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_\mathrm{s}(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{s}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{t}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau \\
\hat{t}_\mathrm{b} &= g \int_0^t v_\infty^\mathrm{s}(p)\, \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{b}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau + g \sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{s} \int_0^{\xi_\mathrm{s}(t)} \exp\left(-\frac{\xi_\mathrm{s}(t)-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{s}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_\mathrm{b}^\mathrm{ve}}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau \quad .
\end{aligned} \tag{6-121}$$

Diese werden nach Berechnung der Schädigungsvariable D in die nominellen Spannungen $\mathbf{t} = (1-D)\,\hat{\mathbf{t}}$ umgerechnet, womit das Konstitutivmodell in den physikalischen Raum überführt wird.

[21] In [Mur12, S. 18] wird der Zustand des Materials im effektiven Raum als fiktiver ungeschädigter Zustand bezeichnet.

6.6.2 Fließfunktion und Fließregel
Flow function and flow rule

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Plastizitätsmodell geht auf das Toughened Adhesive Polymer (TAPO) Modell zurück, dass in den FOSTA Forschungsprojekten P 676 [P6708, S. 69 ff.] und P 828 [BBB+13, S. 250 ff.] zur Berechnung ausgehärteter duktil modifizierter Klebverbindungen auf Epoxidharzbasis bei Raumtemperatur unter Crashbeanspruchung entwickelt worden ist. Die Fließbedingung wird im TAPO-Modell mit einer Fließfunktion f beschrieben, die auf Basis von Messdaten aus quasistatischen Versuchen an geklebten Doppelrohrproben bei Raumtemperatur entwickelt worden ist und auf [Sch74] zurückgeht. Das Fließkriterium berücksichtigt die plastische Kompressibilität des Klebstoffs und besteht zur Beschreibung der Verfestigung aus der Fließspannung τ_y mit der Anfangsfließspannung τ_0 und der nichtlinearen isotropen Verfestigungsspannung R.

Fließfunktion des TAPO-Modells Das TAPO-Modell ist in seiner endgültigen Fassung im Projekt P 828 als räumliches Kontinuumsmodell entwickelt und implementiert worden – s. [BBB+13] und [Bur15]. Aufgrund der Materialisotropie wird die Fließfunktion des TAPO-Modells mit der ersten Invariante des Spannungstensors I_1 und der zweiten Invariante des Spannungsdeviators J_2 gebildet. Die erste Invariante I_1 ist die Spur des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ mit

$$I_1 = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\sigma}) \quad . \tag{6-122}$$

Der Spannungsdeviator $\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{D}$ folgt aus der additiven Aufspaltung des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ in den Kugel- und Deviatoranteil

$$\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{D} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^\mathrm{K} \tag{6-123}$$

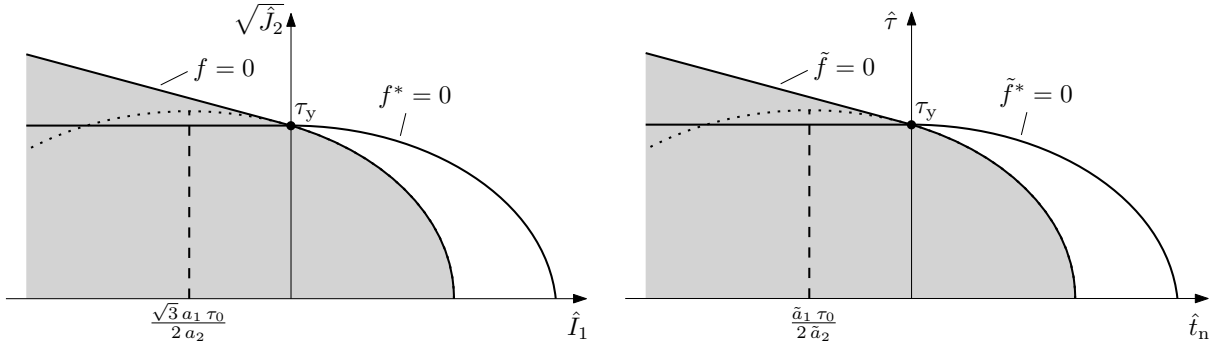
mit $\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{K} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{1}$. Die zweite Invariante des Spannungsdeviators $\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{D}$ folgt dann zu

$$J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{D})^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{D} : \boldsymbol{\sigma}^\mathrm{D} \quad . \tag{6-124}$$

Die konstitutiven Gleichungen werden zunächst im effektiven Spannungsraum definiert und mit der effektiven Spannung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ (6-119) berechnet. Daher werden im Fließkriterium des TAPO-Modells [BBB+13, S. 260, Gl. (100)] die nominellen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ konsequent durch die effektiven Spannungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ersetzt. Die Fließbedingung des TAPO-Modells im effektiven Spannungsraum wird dann mit der zweiten Invariante des effektiven Spannungsdeviators $\hat{J}_2 := J_2(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^\mathrm{D})$ und der erste Invariante des effektiven Spannungstensors $\hat{I}_1 := I_1(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ wie folgt definiert – vgl. [Bur15, S. 56, Gl. (6.11)]:

$$f := \hat{J}_2 + \frac{a_2}{3}\left(\hat{I}_1 + \frac{\sqrt{3}\,a_1\,\tau_0}{2\,a_2}\right)^2 - \left(\tau_\mathrm{y}^2 + \frac{a_1^2\,\tau_0^2}{4\,a_2}\right) = 0 \quad . \tag{6-125}$$

Die Fließbedingung (6-125) enthält die Materialparameter a_1 und a_2, die Anfangsfließspannung τ_0 und Fließspannung τ_y und beschreibt eine Halbellipse im Invariantenraum $\hat{J}_2$-$\hat{I}_1$, deren Mittelpunkt entlang der $\hat{I}_1$-Achse um $\frac{\sqrt{3}\,a_1\,\tau_0}{2\,a_2}$ verschoben ist. Nach [Bur15, S.



(a) Fließortkurven (6-125), (6-126) und plastisches Potential (6-128) des räumlichen Kontinuums

(b) Fließortkurve (6-133) und plastisches Potential (6-134) der Grenzfläche

Abbildung 6-13: (links) Fließortkurven (6-125), (6-126) und plastisches Potential (6-128) des räumlichen Kontinuums im Invariantenraum – vgl. [Bur15, S. 56, Abb. 6.5] – und (rechts) Fließortkurve (6-133) und plastisches Potential (6-134) der Grenzfläche – vgl. [Bur15, S. 108, Abb. 7.16]

Figure 6-13: (left) flow curve (6-125), (6-126) and plastic potential (6-128) of spatial continuum in the domain of invariants—cf [Bur15, S. 56, Abb. 6.5]—and (right) flow curve (6-133) and plastic potential (6-134) of the interface—cf [Bur15, S. 108, Abb. 7.16]

55] ist die elliptische Form der Fließbedingung (6-125) für die Modellierung des Fließverhaltens von Strukturklebstoffen unter Druckbeanspruchung $\hat{I}_1 < 0$ nicht geeignet, da sich ab einem gewissen Druck die Poren und Hohlräume in der Klebstoffsubstanz schließen und plastisches Fließen theoretisch nur noch aufgrund isochorer Beanspruchung stattfinden kann. Jedoch entsteht aufgrund der Druckbeanspruchung im Klebstoff eine höhere Reibung zwischen den Molekülketten, was zu einer Erhöhung der Schubfestigkeit führt. Um diesen Aspekten Rechnung zu tragen, wird die Fließbedingung in [Bur15, Gl. (6.11)] mit der MACAULEY-Klammer (6-97) derart modifiziert, dass im Fall von Druckbeanspruchungen $\hat{I}_1 < 0$ aus der elliptischen Form der Fließbedingung (6-125) die DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung mit

$$f := \hat{J}_2 + \frac{a_1}{\sqrt{3}}\,\tau_0 \hat{I}_1 + \frac{a_2}{3}\,\left\langle \hat{I}_1 \right\rangle^2 - \tau_\mathrm{y}^2 = 0 \tag{6-126}$$

entsteht. Die Verläufe der Fließbedingungen (6-125) und (6-126) im Invariantenraum $\sqrt{\hat{J}_2}$-$\hat{I}_1$ sind in Abb. 6-13(a) dargestellt. Im ersten Quadrant des Invariantenraums sind die Verläufe der Fließbedingungen (6-125) und (6-126) elliptisch. Im zweiten Quadrant wird der Verlauf der Fließbedingung (6-126) entlang der $\hat{I}_1$-Achse nach Überschreiten der Ordinate linear, da im dritten Term $\left\langle \hat{I}_1 \right\rangle$ für $\hat{I}_1 < 0$ aufgrund der MACAULEY-Klammer identisch null ist; die Fließbedingung (6-126) entspricht dann der DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung. Die gepunktete Linie in Abb. 6-13(a) zeigt die elliptische Form der Fließbedingung (6-125), die sich im zweiten Quadranten des Invariantenraums fortsetzt.

Fließregel des TAPO-Modells Da die Fließfunktion (6-126) vom hydrostatischen Spannungszustand abhängt, wird im TAPO-Modell ein plastisches Potential f^* definiert, um eine Überschätzung der Dilatanz beim plastischen Fließen im Fall der assoziierten Fließregel

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathrm{pl} = \lambda\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{6-127}$$

zu vermeiden[22]. Das plastische Potential f^* in [BBB+13, S. 262, Gl. (104)] ist

$$f^* = \hat{J}_2 + \frac{a_2^*}{3} \left\langle \hat{I}_1 \right\rangle^2 - \tau_y^2 \tag{6-128}$$

mit dem Materialparameter a_2^* und hat eine ähnliche Gestalt wie die Fließfunktion (6-126), jedoch ohne den linearen Term $\frac{a_1}{\sqrt{3}} \tau_0 \hat{I}_1$ der zur Verschiebung der Ortkurve entlang der Hydrostatischen Achse führt. Die Ortkurve des plastischen Potentials (6-128) beschreibt ohne die MACAULEY-Klamme eine Ellipse, deren Mittelpunkt stets im Ursprung des Invariantenraums liegt. Aufgrund der MACAULEY-Klammer geht die elliptische Form der Ortkurve am Scheitelpunkt für Druckbeanspruchung $\hat{I}_1 < 0$ über in die VON MISES-Form. Der Verlauf der Ortkurve von (6-128) ist in Abb. 6-13(a) zusammen mit der Fließortkurve im Invariantenraum dargestellt.
Mit dem plastischen Potential f^* (6-128) wird der plastische Fluss in Form der nicht assoziierten Fließregel

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} = \lambda \frac{\mathrm{d} f^*}{\mathrm{d} \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{6-129}$$

mit der effektiven Spannung $\hat{\sigma}$ und dem plastischen Multiplikator λ berechnet.

Fließfunktion des TAPO-Kohäsivzonenmodells Die Klebschicht wird im Folgenden als Grenzfläche zwischen den Substraten betrachtet, da dies unter Annahme dünner Klebschichtdicken im Fall von Strukturklebverbindungen eine gute Idealisierung darstellt. In [Bur15, S. 106 ff.] wird auf Basis dieser Annahme die Fließfunktion des TAPO-Modells für das räumliche Kontinuum auf die Grenzfläche überführt, indem die effektiven Invarianten $\hat{I}_1$ und $\hat{J}_2$ des räumlichen Kontinuums im Sinne der Grenzflächentheorie mit dem reduzierten effektiven Spannungszustand der Grenzfläche überführt werden – s. [Bur15, S. 107, Gln. (7.95) – (7.97)]. Der reduzierte effektive Spannungszustand besteht lediglich aus den Komponenten des lokalen effektiven Grenzflächenspannungsvektors $\hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \hat{t}_\mathrm{n} & \hat{t}_\mathrm{t} & \hat{t}_\mathrm{b} \end{bmatrix}^\top$, wodurch die Fließfunktion der Grenzfläche $\tilde{f}$ als Funktion der effektiven Normalspannung

$$\hat{\mathbf{t}}_\mathrm{n} = (\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_\mathrm{n})\, \mathbf{e}_\mathrm{n} = \hat{t}_\mathrm{n}\, \mathbf{e}_\mathrm{n} \tag{6-130}$$

und der effektiven resultierenden Schubspannung

$$\hat{\tau} = \left| \hat{\mathbf{t}}_\tau \right| = \sqrt{\hat{\mathbf{t}}_\tau \cdot \hat{\mathbf{t}}_\tau} = \sqrt{\hat{t}_\mathrm{t}^2 + \hat{t}_\mathrm{b}^2} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{t}}_\tau = \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{t}}_\mathrm{n} \tag{6-131}$$

– s. [CS94, Gln. (2.27) und (2.29)] – in Analogie zur Fließfunktion des räumlichen Kontinuums (6-125) mit

$$f\left(\hat{I}_1, \hat{J}_2\right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}\left(\hat{t}_\mathrm{n}, \hat{\tau}\right) \leq 0 \tag{6-132}$$

[22] Anm.: Bei einer rein isochoren Beanspruchung – wie z. B. reine Scherung – erhöht sich hier im Fall der assoziierten Fließregel das Volumen des Klebstoffs aufgrund der plastischen Volumendehnung.

postuliert wird. Die Grenzflächenspannung $\hat{\mathbf{t}}$ wird mit dem thermo-chemo-viskoelastischen Modell (6-121) berechnet. In [Bur15, S. 107, Gl. (7.98)] folgt für die Fließbedingung des Kohäsivzonenmodells unter Annahme des Postulats (6-132)

$$\tilde{f} := \hat{\tau}^2 + \tilde{a}_1\,\tau_0\hat{t}_\mathrm{n} + \tilde{a}_2\,\langle\hat{t}_\mathrm{n}\rangle^2 - \tau_\mathrm{y}^2 = 0 \quad . \tag{6-133}$$

In der Fließbedingung (6-133) sind $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ Materialparameter, τ_0 ist die Anfangsfließspannung und τ_y die Fließspannung. Die MACAULEY-Klammer bewirkt in Anlehnung an das Fließkriterium (6-125) die Asymmetrie der Fließortkurve (6-133) für Zug- ($\hat{t}_\mathrm{n} \geq 0$) bzw. Druckbeanspruchung ($\hat{t}_\mathrm{n} < 0$) in Richtung der Grenzflächennormalen $\mathbf{e}_\mathrm{n}$. Der Verlauf der Fließbedingung (6-133) ist im $\hat{\tau}$-$\hat{t}_\mathrm{n}$-Diagramm 6-13(b) dargestellt. Im ersten Quadrant für $t_\mathrm{n} \geq 0$ hat die Fließortkurve (6-133) elliptische Gestalt. Nachdem die Ortkurve die Ordinate $\hat{\tau}$ überschritten hat, entspricht der Verlauf der Fließbedingung (6-133) für $t_\mathrm{n} < 0$ dem MOHR-COLOUMB Reibmodell, dessen Form der Fließbedingung (6-126) vom DRUCKER-PRAGER-Typ für $\hat{I}_1 < 0$ ähnlich ist.

Fließregel des TAPO-Kohäsivzonenmodells In [Bur15, S. 108, Gl. (7.99)] wird für das Kohäsivzonenmodell aus dem plastischen Potential des TAPO-Modells für das räumlichen Kontinuum (6-128) das plastische Potential

$$\tilde{f}^* = \tilde{a}_2^*\,\langle\hat{t}_\mathrm{n}\rangle^2 + \hat{\tau}^2 - \tau_\mathrm{Y}^2 \tag{6-134}$$

mit dem Materialparameter $\tilde{a}_{2*}$ in gleicher Weise überführt wie die Fließfunktion (6-133). Der Verlauf der Ortkurve des plastischen Potentials der Grenzfläche $\tilde{f}^*$ (6-134) ist zusammen mit der Fließfunktion der Grenzfläche (6-133) in Abb. 6-13(b) dargestellt. Das plastische Potential (6-134) hat im ersten Quadrant in Abb. 6-13(b) für $t_\mathrm{n} > 0$ einen elliptischen Verlauf. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt im Gegensatz zur Fließfunktion (6-133) stets im Ursprung des Grenzflächenspannungsraums $\hat{\tau} - t_\mathrm{n}$. Aufgrund der MACAULEY-Klammer geht die elliptische Form der Ortkurve am Scheitelpunkt der Ellipse für negative Grenzflächennormalspannungen $t_\mathrm{n} < 0$ in einen konstanten Verlauf über. Der Übergang von der elliptischen Form in den konstanten Verlauf bei $t_\mathrm{n} = 0$ ist stetig und ohne Knick, wodurch (6-134) stetig differenzierbar ist.

Die zeitliche Änderung des plastischen Verschiebungssprungs $\dot{\boldsymbol{\Delta}}^\mathrm{pl}$ im Sinne eines plastischen Flusses $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathrm{pl}$ ergibt sich aus dem plastischen Potential $\tilde{f}^*$ (6-134) in Anlehnung an die nichtassoziierte Fließregel (6-129) zu

$$\dot{\boldsymbol{\Delta}}^\mathrm{pl} = \lambda\,\frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial\hat{\mathbf{t}}} = 2\,\lambda\,\left(\tilde{a}_2^*\,\langle\hat{t}_\mathrm{n}\rangle\,\mathbf{e}_\mathrm{n} + \hat{\tau}\,\mathbf{e}_\tau\right) \tag{6-135}$$

mit dem plastischen Multiplikator λ – der hier eine Größe vom Typ einer Verschiebungsdiskontinuität ist –, dem Spannungsvektor $\hat{\mathbf{t}}$, dem Einheitsvektor der resultierenden Schubrichtung

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\mathbf{t}_\tau}{\tau} = \frac{t_\mathrm{t}\,\mathbf{e}_\mathrm{t} + t_\mathrm{b}\,\mathbf{e}_\mathrm{b}}{\sqrt{t_\mathrm{t}^2 + t_\mathrm{b}^2}} \tag{6-136}$$

und dem Einheitsvektor normal zur Grenzfläche $\mathbf{e}_\mathrm{n}$ des lokalen mit rotierenden Koordinatensystems. In Anlehnung an die plastische Bogenlänge wird eine interne Variable

vom Typ einer Verschiebungsdiskontinuität definiert, deren Evolutionsgleichung

$$\dot{r} = \lambda \sqrt{\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{pl}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{pl}}} = 2\,\lambda \sqrt{\left(\tilde{a}_2^* \langle \hat{t}_{\mathrm{n}} \rangle\right)^2 + \hat{\tau}^2} \tag{6-137}$$

die EUKLIDsche Norm der Rate des plastischen Verschiebungssprungs (6-135) ist. Die aus der Rate (6-137) akkumulierte Größe r bildet die resultierende Länge der plastischen Verschiebungsdiskontinuität $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}$ auf einen Skalar ab und dient im TAPO-Kohäsivzonenmodell als interne Variable im Verfestigungsmodell.

Temperatur- und aushärtegradabhängige Fließbedingung Im Zuge der Anpassung des Konstitutivmodells an die aufgezeichneten Warmfließ- und Fließkurven mit teilausgehärteten Klebschichten aus Scher- und Kopfzugversuchen des LWF (s. Kapitel 7.3 und Kapitel 7.4) wird deutlich, dass die Fließbedingung (6-133) mit

$$\tilde{f} := \hat{\tau}^2 + \tilde{a}_1\, \tau_{\theta \mathrm{c}}\, \hat{t}_{\mathrm{n}} + \tilde{a}_2(\theta)\, \langle \hat{t}_{\mathrm{n}} \rangle^2 - \tau_{\mathrm{y}}^2(\theta, p, r) = 0 \tag{6-138}$$

um den Einfluss der Temperatur θ und den Aushärtegrad p erweitert werden muss. Dabei zeigt sich im Zuge der Anpassung, dass sich der Materialparameter $\tilde{a}_2(\theta)$ der Fließfunktion (6-138) als Funktion der Temperatur θ ändern muss, um sowohl die Warmfließkurvenschar der Scher- als auch Kopfzugversuche in den Abbn. 7-10(a) und 7-10(b) adäquat beschreiben zu können. In Abb. 6-14(a) ist der lineare Verlauf

$$\tilde{a}_2(\theta) = \tilde{a}_{20}\, (1 + m_{a2}\, (\theta - \theta_0)) \tag{6-139}$$

mit dem Materialparameter $\tilde{a}_{20}$ – der $\tilde{a}_2$ bei Raumtemperatur entspricht – und der Raumtemperatur θ_0 zusammen mit den Datenpunkten[23] aus der Anpassung des Materialmodells an die Warmfließkurven Abbn. 7-10(a) und 7-10(b) dargestellt. Unter dem Gesichtspunkt, die Anzahl der Materialparameter möglichst gering zu halten, bildet die lineare Funktion (6-139) die Datenpunkte über der Temperatur mit zufriedenstellender Genauigkeit ab.

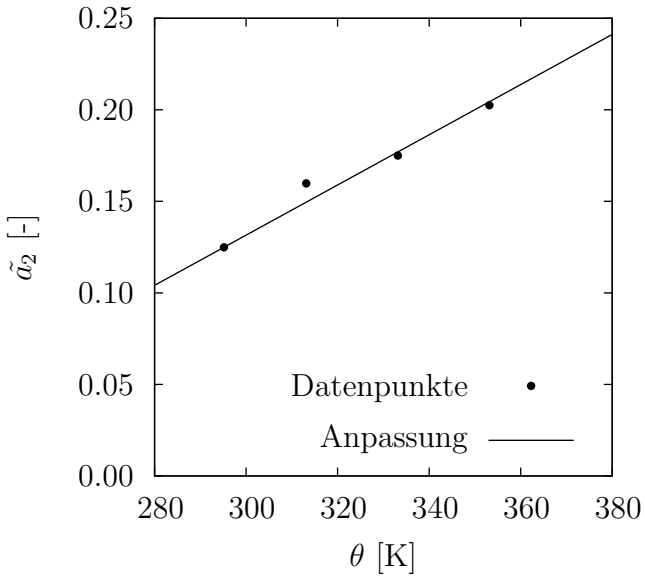
6.6.3 Fließspannung mit nichtlinearer isotroper Verfestigung
Yield stress with nonlinear isotropic hardening

In der Fließfunktion der Grenzfläche (6-133) beschreibt die Fließspannung τ_{y} sowohl den Beginn des erstmaligen plastischen Fließens mit der Anfangsfließspannung τ_0 als auch die Verfestigung des Klebstoffs mit der Verfestigungsspannung $R(r)$ – s. [BBB+13] und [Bur15]:

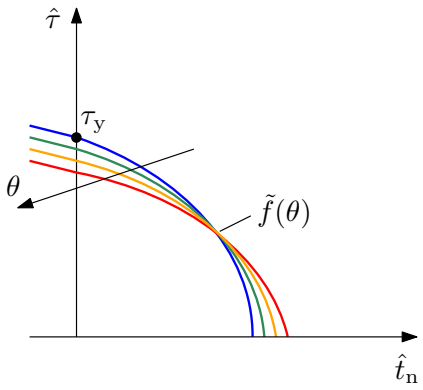
$$\tau_{\mathrm{y}}(r) = \tau_0 + R(r) \quad . \tag{6-140}$$

Der Aufbau und die Interpretation der Verfestigungsspannung (6-140) wird in Kapitel 6.3.4 am Beispiel der rheologischen Elemente an den eindimensionalen Modellgleichungen gezeigt und diskutiert. In [BBB+13, Gl. (111)] und [Bur15, Gl. (6.20)] wird in

[23] Hinweis: Die Datenpunkte werden durch Anpassung des Materialparameters $\tilde{a}_2$ an die Messdaten der Warmfließkurvenscharen in Kapitel 7.3 ermittelt.



(a) Materialparameter $\tilde{a}_2$ (6-139) als Funktion der Temperatur θ



(b) Qualitative Fließortkurveschar $\tilde{f}$ (6-138) für verschiedene feste Temperaturen θ

Abbildung 6-14: Verlauf des Materialparameters $\tilde{a}_2$ (6-139) über der Temperatur θ (links) und qualitativer Verlauf der Fließfunktion $\tilde{f}$ (6-138) in Abhängigkeit der Temperatur θ
Figure 6-14: Course of $\tilde{a}_2$ (6-139) over temperature θ (left) and qualitativ course of flow function $\tilde{f}$ (6-138) with respect to temperature θ

der Fließspannung τ_y die Ratenabhängigkeit des Klebstoffs für die Crashanalyse mithilfe eines Ansatzes nach JOHNSON und COOK berücksichtigt, der im vorliegenden Konstitutivmodell immer noch vorhanden ist, jedoch für die Berechnung der quasistatisch ablaufenden Aufheizprozesse irrelevant ist. Die Verfestigungsspannung (6-140) ist unter Berücksichtigung von [JC83] in Anlehnung an [BBB$^+$13, Gl. (111)] und [Bur15, Gl. (6.20) i. V. m. S. 109, Abs. 1] mit der Vergleichsrate des Gesamtverschiebungssprungs[24] $\dot{\Delta} = \left|\dot{\boldsymbol{\Delta}}\right|$ und den Materialparametern[25] $\dot{\Delta}_0$ und $\dot{\Delta}_m$ – s. [P8714, Gl. (6.71), S. 199 und Abb. 6.13 (b), S. 200]:

$$\tau_y(r) = [\tau_0 + R(r)] \left[1 + C \left(\left\langle \ln \frac{\dot{\Delta}}{\dot{\Delta}_0} \right\rangle - \left\langle \ln \frac{\dot{\Delta}}{\dot{\Delta}_m} \right\rangle \right)\right] \quad . \tag{6-141}$$

Die Temperaturabhängigkeit der Fließbedingung (6-138) wird unter anderem mit der Fließspannung τ_y (6-140) beeinflusst, die eine Funktion der Temperatur θ und des Aushärtegrads p gemäß

$$\tau_y(\theta, p, r) = \tau_{\theta c}(\theta, p) + R_{\theta c}(\theta, p, r) \tag{6-142}$$

ist. In Gl. (6-142) sind die Anfangsfließspannung $\tau_{\theta c}(\theta, p)$ und die nichtlineare isotrope Verfestigungsspannung $R(\theta, p, r)$ als Funktionen der Temperatur θ und des Aushärtegrads p definiert. Im Fall der Anfangsfließspannung $\tau_{\theta c}$ wird angenommen, dass die

[24] Anm.: In [Bur15] wird für das TAPO-Kohäsivzonenmodell statt der Verschiebungsdiskontinuität $\boldsymbol{\Delta}$ das Dehnungsmaß der Grenzschicht $\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{\boldsymbol{\Delta}}{d_k + \Delta_n}$ verwendet – [Bur15, Gl. (7.85), S. 103].

[25] Anm.: In [BBB$^+$13, Gl. (111)] wird für den ratenabhängigen Ansatz die Initialgleitrate $\dot{\gamma}_0$ und eine begrenzende Gleitrate $\dot{\gamma}_m$ als Materialparameter eingeführt.

Temperatur- und Aushärtegradabhängigkeit voneinander entkoppelt sind, wonach

$$\tau_{\theta \mathrm{c}}(\theta, p) = \tau_{\theta}(\theta)\, \chi_{\mathrm{c}}(p) \tag{6-143}$$

mit der Temperaturfunktion τ_θ und der Aushärtegradfunktion χ_c folgt. Für die Verfestigungsspannung R wird ein Ansatz gewählt, bei dem die temperaturabhängige Verfestigung mit einer Funktion in Abhängigkeit des Aushärtegrads wie folgt beeinflusst wird:

$$R_{\theta \mathrm{c}}(\theta, p, r) = R_{\theta}(\theta, r)\, \phi_{\mathrm{c}}(p) \quad . \tag{6-144}$$

Im Verfestigungsansatz (6-144) ist der Einfluss der Temperatur und des Aushärtegrads ebenfalls von einander entkoppelt. Die nichtlineare isotrope Verfestigungsspannung des vollständig Ausgehärteten Klebstoffs bei Raumtemperatur wird im Folgenden definiert und diskutiert. Danach folgt die Beschreibung der Ansätze für die Temperatur- und Aushärtegradabhängigkeit der Verfestigungsspannung.

Nichtlineare isotrope Verfestigungsspannung Die nichtlineare isotrope Verfestigung des ausgehärteten Materials bei Raumtemperatur[26] ist eine Funktion der akkumulierten internen Variable (6-137), die in Form der plastischen Bogenlänge r die Verfestigungsspannung vorantreibt und damit eine gleichmäßige Ausweitung der Fließfläche (6-133) herbeiführt. Die Verfestigungsspannung $R(r)$ setzt sich aus einem sättigendem Exponentialansatz und einem linearen Term

$$R(r) = q\,[1 - \exp(-b\,r)] + H\,r \tag{6-145}$$

zusammen, wie in Kapitel 6.3.4 am rheologischen Netzwerk 6-5 des eindimensionalen Modells motiviert – vgl. Gln. (6-63) und (6-64). Abb. 6-15 zeigt die Bedeutung der Materialparameter q, b und H der nichtlinearen Verfestigungsspannung (6-145) anhand des Verlaufs der Fließspannung τ_y (6-140) über der Bogenlänge r mit der konstanten Anfangsfließspannung τ_0. Die Parameter q und b beschreiben den Verlauf des Exponentialterms in (6-145), der im rheologischen Netzwerk 6-5 als Reihenschaltung des Verfestigungs- 6-2(e) und dissipativen Dehnungselements 6-2(f) interpretiert wird. Der Materialparameter q ist demnach identisch mit dem Sättigungswert der Verfestigungsspannung κ_∞ in der Evolutionsgleichung für die dissipative Dehnung (6-50) und b beeinflusst die Krümmung der Kurve

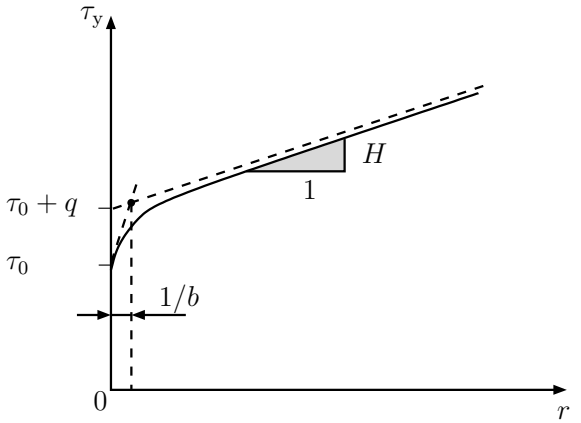


Abbildung 6-15: Fließspannung τ_y (6-140) über akkumulierter plastischer Bogenlänge r
Figure 6-15: Yield stress τ_y (6-140) over accumulated plastic arclength r

[26] Anm.: Die Materialparameter des isothermen TAPO-Modells für ausgehärtete Strukturklebstoffe werden an Versuchsdaten mit ausgehärtetem Klebstoff bei Raumtemperatur angepasst. Daher ist die Wahl der Raumtemperatur als Referenztemperatur und die vollständige Aushärtung als Referenzaushärtegrad sinnvoll.

in Abb. 6-15 als Verhältnis zwischen dem Modul des Verfestigungselements E_{κ_1} und dem Sättigungswert der Verfestigungsspannung κ_∞ mit $b = \frac{E_{\kappa_1}}{\kappa_\infty}$. Der reziproke Wert des Parameters b beschreibt die Abszisse des Schnittpunktes der Asymptote $q + H\,r$ mit der Tangente der Fließspannung (6-140) für $r = 0$

$$\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} = q\,b\,\exp\left(-b\,r\right) + H \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = q\,b + H \tag{6-146}$$

bei der Anfangsfließspannung τ_0. Der Parameter H beschreibt den Verfestigungsmodul des linearen Terms in der Verfestigungsspannung (6-145) und ist äquivalent mit dem Verfestigungsmodul E_{κ_2} der linearen Verfestigungsspannung (6-53) des eindimensionalen Modells. In der Verfestigungsspannung (6-145) beschreibt er die Steigung der Verfestigung für $r \to \infty$. Die Verfestigungsspannung R geht für $r \to \infty$ asymptotisch gegen den linearen Term $q + H\,r$. Der Schnittpunkt der Asymptote $q + H\,r$ mit der Ordinate ist die Summe aus der Anfangsfließspannung τ_0 und dem Parameter q der Verfestigungsspannung.

Temperaturfunktionen der Fließspannung Die Fließspannung τ_y (6-140) ändert sich in Abhängigkeit der Temperatur θ und beeinflusst somit die temperaturabhängige Fließbedingung (6-138). Anhand der Messdaten quasistatisch zügiger Scherzugversuche mit dem Klebstoff *EP 1* wird deutlich, dass sich die temperaturabhängige Anfangsfließspannung τ_θ (6-143) in der Fließspannung (6-142) mit steigender Temperatur θ verringert – s. Abb. 7-10(a) und 7-10(b). In Abb. 6-16 wird anhand der Datenpunkte[27] der Anfangsfließspannungen bei verschiedenen Temperaturen aus der Warmfließkurvenschar der quasistatischen Scherzugversuche deutlich, wie die Anfangsfließspannung τ_θ über der Temperatur θ verläuft. JOHNSON und COOK haben in [JC83] einen Ansatz zur Modellierung der Temperaturabhängigkeit der Fließspannung vorgeschlagen, bei dem die Anfangsfließ- und Verfestigungsspannung mit einer empirischen Temperaturfunktion multipliziert wird, die mit einer entdimensionierten Temperatur definiert ist. Gemäß [JC83] wird für die Anfangsfließspannung τ_θ eine Funktion in Abhängigkeit der Temperatur θ definiert, die im rechtsseitig unendlich abgeschlossenen Temperaturintervall $[0, \infty)$ stetig und stetig differenzierbar sowie für die Grenzwerte $\theta \to 0$ und $\theta \to \infty$ beschränkt ist. In Anlehnung an [Brö14, S. 89, Gl. (6.44)] wird die Funktion

$$\tau_\theta = \frac{\tau_0}{2}\left[1 + \tanh\left(m_\tau\left(\theta_\tau - \theta\right)\right)\right] \tag{6-147}$$

als Temperaturfunktion mit den Materialparametern τ_0[28], m_τ und θ_τ definiert. Die hyperbolische Funktion (6-147) erfüllt die Voraussetzungen an die Stetigkeit und Beschränktheit und ist als Anpassung in der Abb. 6-16 zusammen mit den Datenpunkten dargestellt. Die Anfangsfließspannung (6-147) bietet darüber hinaus die Möglichkeit, dass sie ggf. an Datenpunkte für Temperaturen unterhalb der Raumtemperatur θ_0 angepasst

[27] Hinweis: Die Datenpunkte werden durch Anpassung des Materialparameters τ_0 an die Messdaten der Warmfließkurvenscharen in Kapitel 7.3 ermittelt.

[28] Anm.: Der Materialparameter τ_0 bildet in der Temperaturfunktion (6-147) nicht die Anfangsfließspannung bei Raumtemperatur θ_0 ab.

werden kann. Die in [P8714, Gl. (6.74), S. 202] vorgeschlagene Temperaturfunktion ist für den Betriebslastfall im Temperaturintervall zwischen der Raum- und Glasübergangstemperatur definiert und eignet sich nicht für Temperaturen unterhalb der Raum- bzw. oberhalb der Glasübergangstemperatur.

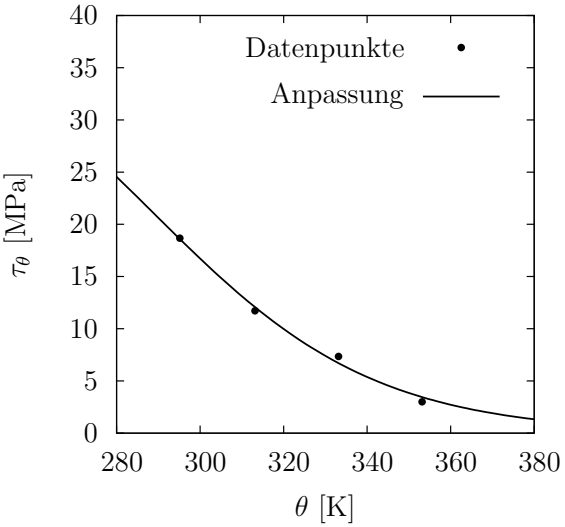


Abbildung 6-16: Anfangsfließspannung τ_θ (6-147) als Funktion der Temperatur θ
Figure 6-16: Temperature dependency of yield threshold τ_θ (6-147)

Des Weiteren wird anhand der Versuchsdaten ein temperaturabhängiges Verfestigungsverhalten deutlich, das sich bei der Verfestigungsspannung $R(\theta,r)$ in der Fließspannung τ_y mit einer Verringerung des Abstands q zwischen der Anfangsfließspannung τ_0 mit dem Schnittpunkt der Asymptote τ_0+q und zum anderen durch eine Verringerung des Einlaufverhaltens $1/b$ in die Asymptote zeigt – vgl. Abb. 6-15 mit Abb. 7-10(a)[29]. Für eine möglichst genaue Anpassung des Konstitutivmodells an die Messdaten werden die Materialparameter q und b der Verfestigungsspannung (6-145) jeweils als Funktionen der Temperatur θ formuliert. Dabei werden dieselben Anforderungen an die Temperaturfunktionen gestellt, die auch im Fall der temperaturabhängigen Anfangsfließspannung gefordert werden. Die Datenpunkte[30] aus den Versuchen an der Scherzugprobe des LWF zeigen, dass sich auch hier hyperbolische Funktionen für die Anpassung der Parameter q_θ und b_θ besonders gut eigenen:

$$q_\theta(\theta) = \frac{q_0}{2}\left[1+\tanh\left(m_q\left(\theta_q-\theta\right)\right)\right]+q_1 \tag{6-148}$$

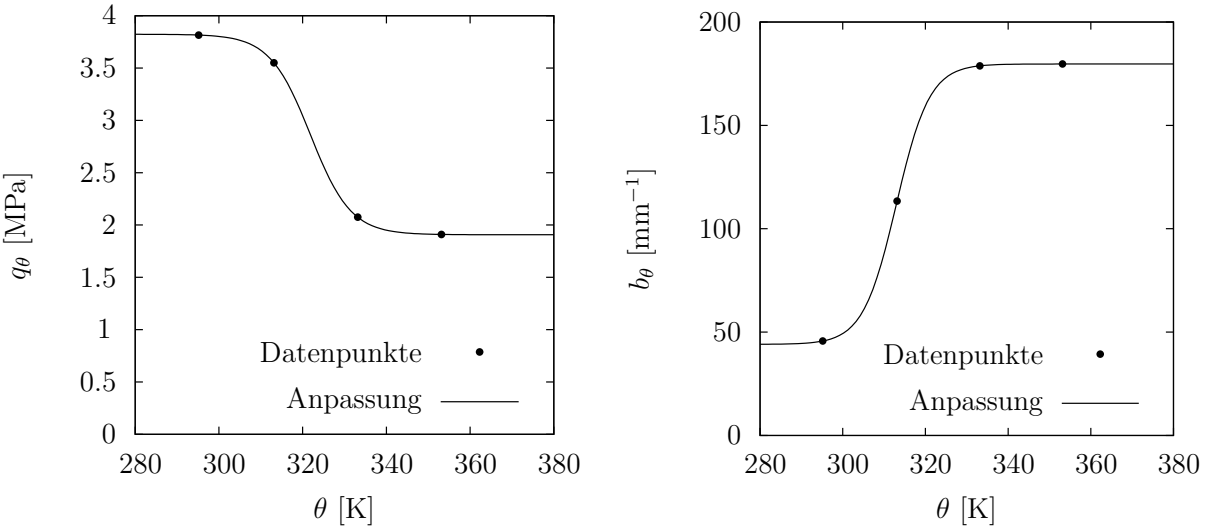
$$b_\theta(\theta) = \frac{b_0}{2}\left[1+\tanh\left(m_b\left(\theta-\theta_b\right)\right)\right]+b_1 \quad . \tag{6-149}$$

In den Gln. (6-148) und (6-149) sind q_0, b_0[31], m_q, m_b sowie θ_q und θ_b Materialparameter, die an die Warmfließkurvenschar aus Scher- und Kopfzugversuchen angepasst werden. Die Anpassungen der Temperaturfunktionen der Verfestigungsparameter (6-148) und (6-149) sind in den Abbn. 6-17(a) und 6-17(b) dargestellt. Der Verfestigungsmodul H in der Verfestigungsspannung (6-145) ist für den Strukturklebstoff *EP 1* näherungsweise konstant über der Temperatur θ. Dennoch wird in Anlehnung an [P8714, Gl. (6.77), S.

[29] Ein weiteres Phänomen ist die Nachverfestigung des Klebstoff *EP 1* , die sich bei fortgeschrittener plastischer Deformation ab einer Temperatur zwischen $60\,$℃ und $70\,$℃ im Schubspannungs-Verschiebungsdiagramm zeigt und im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet wird.

[30] Hinweis: Die Datenpunkte werden durch Anpassung der Materialparameter q_0 und b_0 an die Messdaten der Warmfließkurvenscharen in Kapitel 7.3 ermittelt.

[31] Anm.: Die Materialparameter q_0 und b_0 bilden in den Temperaturfunktionen (6-148) und (6-149) nicht die Werte bei Raumtemperatur θ_0 ab.



(a) Sättigungswert q_θ (6-148) in Abhängigkeit der Temperatur θ

(b) Exponentialfaktor b_θ (6-149) in Abhängigkeit der Temperatur θ

Abbildung 6-17: Temperaturfunktionen der Verfestigungsparameter q_θ (6-148) (links) und b_θ (6-149) (rechts)
Figure 6-17: Temperature functions of hardening parameters q_θ (6-148) (left) and b_θ (6-149) (right)

203] für den Verfestigungsmodul die Temperaturfunktion

$$H_\theta(\theta) = \frac{h_0}{2}\left[1 + \tanh\left(m_h\left(\theta - \theta_h\right)\right)\right] + h_1 \tag{6-150}$$

mit den Materialparametern h_0[32], m_h und θ_h definiert, um die Anwendbarkeit des Konstitutivmodells auch für Strukturklebstoffe zu ermöglichen, die unter Umständen eine ausgeprägte Abhängigkeit des Verfestigungsmoduls H von der Temperatur θ zeigen. Für den vorliegenden Strukturklebstoff *EP 1* ist der konstante Verfestigungsmodul $H_\theta = h_1$ mit $h_0 = 0$ in Abb. 6-18(a) mit den Datenpunkten[33] aus der Anpassung des Konstitutivmodells an die Warmfließkurvenschar dargestellt. Für die temperaturabhängige Verfestigungsspannung R_θ in der Fließspannung (6-144) folgt mit (6-148), (6-149) und (6-150)

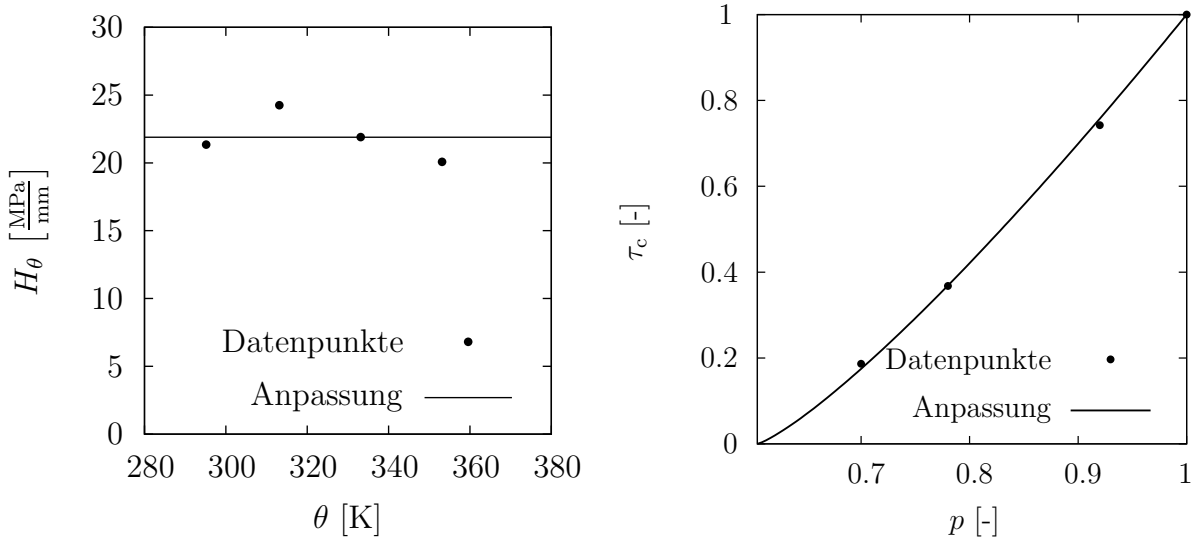
$$R_\theta(\theta) = q_\theta\left[1 - \exp\left(-b_\theta\, r\right)\right] + H_\theta\, r \quad . \tag{6-151}$$

Die Verfestigungsspannung R_θ (6-151) beschreibt den Einfluss der Temperatur θ auf die Verfestigung des Strukturklebstoffs *EP 1* in guter Übereinstimmung mit den Warmfließkurven quasistatisch zügiger Scher- und Kopfzugversuche – s. [MK16, Abb. 7].

Änderung der Fließspannung mit dem Aushärtegrad In der Fließspannung τ_y (6-142) wird der Einfluss des Aushärtegrads p auf die Anfangsfließspannung $\tau_{\theta\mathrm{c}}$ gemäß des Ansatzes (6-143) von der Temperatur θ entkoppelt betrachtet und modelliert. Für die aushärtegradabhängige Funktion $\chi_\mathrm{c}(p)$ in der Anfangsfließspannung $\tau_{\theta\mathrm{c}}$ (6-143) wird in

[32] Anm.: Der Materialparameter h_0 bildet in der Temperaturfunktion (6-150) nicht den Wert des Verfestigungsmoduls bei Raumtemperatur θ_0 ab.

[33] Hinweis: Die Datenpunkte werden jeweils durch Anpassung des Materialparameters h_1 an die Messdaten der Warmfließkurvenscharen in Kapitel 7.3 für $h_0 = 0.0$ ermittelt.



(a) Temperaturfunktion Verfestigungsmodul (b) Aushärtegradfunktion Anfangsfließspannung

Abbildung 6-18: Temperaturabhängiger Verfestigungsmodul H_θ (links) und Aushärtegradfunktion der Anfangsfließspannung χ_c (rechts)
Figure 6-18: Temperature dependend hardening modulus H_θ (left) and yield threshold as function of cure χ_c (right)

Anlehnung an [Men11, Gl. (3.30), S. 72] der Ansatz

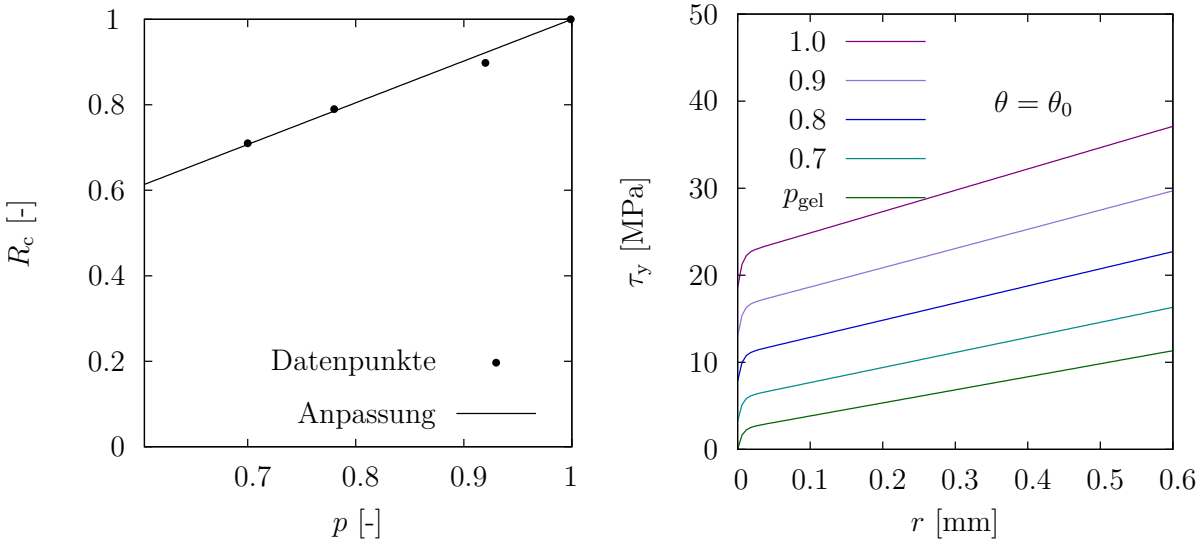
$$\chi_c = \left(\frac{\langle p - p_{gel} \rangle}{1 - p_{gel}} \right)^{\chi_1} \tag{6-152}$$

mit dem Materialparameter χ_1 und dem Gelpunkt p_{gel} verwendet, der sich am Gleichgewichtsmodul $G_\infty(p)$ (6-98) in Abhängigkeit des Aushärtegrads p nach [AM96] orientiert. Die Funktion (6-152) ist für die Aushärtegrade p innerhalb des geschlossenen Intervalls $[p_{gel}, 1]$ definiert und hat den Wertebereich $\mathscr{W}(\chi_c) = \{\chi_c \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq \chi_c \leq 1\}$ – vgl. Abb. 6-18(b). Die Epoxidharzmatrix des Klebstoffs ist für Aushärtegrade unterhalb des Gelpunkts p_{gel} flüssig, wodurch Mikrorisse und damit Plastizität ausgeschlossen werden kann. Das Fließphänomen mit Verfestigung und irreversiblen Deformationen aufgrund der Defekte in der Epoxidharzmatrix kann also erst stattfinden, wenn der Aushärtegrad p den Gelpunkt p_{gel} überschritten hat und der Klebstoff von der flüssigen in die feste Phase übergegangen ist – s. Kapitel 6.2.2. Daher darf plastisches Fließen im Konstitutivmodell für duktil modifizierten Strukturklebstoffe erst nach Erfüllung der Bedingung

$$\tilde{f} = \begin{cases} < 0 & & \text{viskoelastisch} \\ = 0 & \wedge \quad p \geq p_{gel} & \text{plastisch} \end{cases} \tag{6-153}$$

unter Auswertung der Fließfunktion $\tilde{f}$ (6-138) stattfinden. Die Anfangsfließspannung (6-152) wird für Aushärtegrade unterhalb des Gelpunkts für $p < p_{gel}$ ohne Auswirkung auf den viskoelastischen Modellteil des Konstitutivmodells mithilfe der MACAULEY-Klammer (6-97) identisch Null gesetzt[34]. Des Weiteren verhindert die MACAULEY-Klammer (6-

[34]Hinweis: Für die Evolution des Aushärtegrads $\dot{p}$ gilt stets $\dot{p} \geq 0$. Damit ist der Phasenübergang am Gelpunkt $p = p_{gel}$ irreversibel und der Klebstoff geht immer von der flüssigen in die feste Phase über.



(a) Aushärtegradfunktion ϕ_c (b) Fließspannung $\tau_y(\theta, p, r)$

Abbildung 6-19: Aushärtegradfunktion der Verfestigungsspannung ϕ_c (links) und Temperatur- und aushärtegradabhängige Fließspannung $\tau_y(\theta, p, r)$ (rechts) bei Raumtemperatur $\theta = \theta_0$
Figure 6-19: Function of cure for hardening stress ϕ_c (left) and temperature and cure dependend flow stress $\tau_y(\theta, p, r)$ (right) at ambient temperature $\theta = \theta_0$

97), dass die Potenzfunktion (6-152) wegen eines negativen Radikanden mathematisch unbestimmt wird.

In der Fließspannung (6-142) ist die Verfestigungsspannung $R_{\theta c}$ abhängig von der akkumulierten plastischen Bogenlänge r (6-137) als spannungstreibende Größe, vom Zeit-Temperaturverlauf $\theta(t)$ und der damit einhergehenden Entwicklung des Aushärtegrads $\dot{p}(\theta(t))$ in Form des akkumulierten Aushärtegrads p. Gemäß des Ansatzes (6-144) wird die temperaturabhängige Verfestigungsspannung (6-151) mit der Funktion $\phi_c(p)$ beeinflusst, die abhängig vom Aushärtegrad p ist. In Anlehnung an [AM96] wird die Funktion

$$\phi_c = 1 - \phi_1 \frac{1-p}{1-p_{gel}} \tag{6-154}$$

mit der Steigung ϕ_1 und dem Gelpunkt p_{gel} definiert, die im abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ des Aushärtegrads p definiert ist, aber das Konstitutivmodell wegen (6-153) nur im Fall $p \geq p_{gel}$ beeinflusst. Die Aushärtegradfunktion (6-154) ist in Abb. 6-19(a) über dem Aushärtegrad zwischen dem Gelpunkt p_{gel} und $p = 1$ dargestellt. Sie nimmt mit steigendem Aushärtegrad p zu und erreicht im Fall der vollständigen Aushärtung des Klebstoffs für $p = 1$ ihr Maximum mit $\phi_c(p)|_{p=1} = 1$.

Die Auswirkungen der Aushärtegradfunktionen der Verfestigungs- ϕ_c (6-154) und Anfangsfließspannung χ_c (6-152) auf die Fließspannung τ_y (6-142) ist im Diagramm 6-19(b) bei Raumtemperatur $\theta = \theta_0$ dargestellt. Neben der Erhöhung der Anfangsfließspannung mit steigendem Aushärtegrad p aufgrund von Gl. (6-152) ist auch eine leichte Zunahme des Verfestigungsmoduls und des Sättigungswerts in der Verfestigungsspannung (6-151) aufgrund von Gl. (6-154) wegen des Zusammenhangs (6-144) zu beobachten.

6.6.4 Schädigungsansatz des Kohäsivzonenmodells
Damage approach of the cohesive zone model

In [BBB+13] ist ein Schädigungsmodell entwickelt worden, dass die duktile Schädigung von ausgehärteten duktil modifizierten Strukturklebverbindungen bei Raumtemperatur infolge plastischer Verformung beschreibt. Die plastische Verformung entsteht bei duktil modifizierten Strukturklebstoffen nach Erreichen der Fließgrenze aufgrund der Entstehung von Mikrorissen in und Kavitation durch Ablösung der Gummipartikel von der Epoxidharzmatrix. Die Gummipartikel in der Epoxidharzmatrix bewirken dabei, dass das Wachstum der entstandenen Mikrorisse zunächst gestoppt wird. Danach verlaufen einige Risse entweder um die Gummipartikel herum und lösen diese aus der Epoxidharzmatrix, verästeln sich an den Gummipartikel, um danach weiter durch die Epoxidharzmatrix zu laufen oder durchtrennen gar Gummipartikel und führen so zu Kavitation im Strukturklebstoff. In allen Fällen wird das Risswachstum in der Epoxidharzmatrix gehemmt, was bei den duktil modifizierten Strukturklebstoffen aus phänomenologischer Sicht als Plastizität mit Verfestigung interpretierbar ist – s. [Bur15, S. 49 ff.].

Nach Überschreiten der Fließgrenze werden die vorgenannten Phänomene daher mithilfe des vorgestellten TAPO-Plastizitätsmodells mit nichtlinearer isotroper Verfestigung beschrieben, da so die irreversiblen Deformationen aufgrund der Poren- und Hohlraumbildung abgebildet werden können.

Eine signifikante Degradation der Steifigkeit des Klebstoffs ist erst nach Erreichen des Spannungsmaximums zu beobachten. Daher beginnt in [BBB+13] die Schädigungsakkumulation im Schädigungsmodell erst nach Überschreiten der kritischen Gleitung γ_c, die mit dem Spannungsmaximum korrespondiert. Daher wird die Evolution der Schädigung $\dot{D}$ bei zügiger Belastung erst dann aktiv, wenn die plastische Bogenlänge den Wert der kritischen Gleitung γ_c überschritten hat. Die Schädigungsvariable D erreicht ihr Maximum $D = 1$, wenn die plastische Bogenlänge mit der Bruchgleitung γ_f identisch ist.

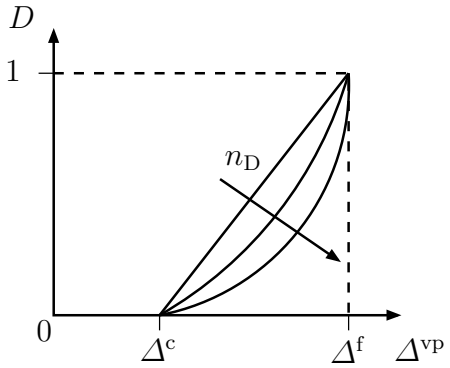
Konstitutivgleichungen der Schädigung bei Raumtemperatur In [BBB+13] wird die Degradation der Steifigkeit der Klebschicht im TAPO-Modell mit der stetig abnehmenden Kontinuität (6-116) beschrieben – s. [BBB+13, S. 264, Gl. (108)]. Der Schädigungsansatz im TAPO-Modell [BBB+13, S. 267, Gl. (114)] basiert auf [Lem85, Kap. 3.2], der in [BBB+13] um den Exponent n_D erweitert und von der akkumulierten plastischen Bogenlänge r angetrieben wird.

Im der vorliegenden Arbeit wird der Schädigungsansatz aus [BBB+13] für das TAPO-Kohäsivzonenmodell mit der lokalen Verschiebungsdiskontinuität $\boldsymbol{\Delta}$ zwischen den Substraten formuliert – vgl. [P8714, S. 205 ff.].

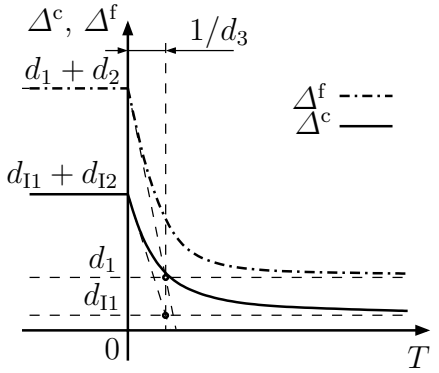
Die Schädigungsvariable D wird von der EUKLIDschen Norm des viskoelastisch-plastischen Verschiebungssprungs $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} = \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} + \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}$

$$\Delta^{\mathrm{vp}} = \sqrt{\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}}} \tag{6-155}$$

in Form eines viskoelastisch-plastischen Vergleichsverschiebungssprungs angetrieben – s. [MK16, Gln. $(15)_3$]. In Anlehnung an die Schädigungsgleichung [P8714, S. 205, Gl.



(a) Schädigungsvariable D über der pl. Bogenlänge r für $n > 1$



(b) kritischer Verschiebungssprung Δ^c und Bruchverschiebungssprung Δ^f über T

Abbildung 6-20: Verlauf der Schädigung D (6-156) über Δ^vp (6-155) für verschiedene Exponenten n_D (links) und kritischer Verschiebungssprung Δ^c (6-160) und Bruchverschiebungssprung Δ^f (6-161) über T (rechts) für $d_4 = 0.0$ – vgl. [BBB+13, S. 268, Abb. 252] und [P8714, Abb. 6.16]
Figure 6-20: course of damage D (6-156) over Δ^vp (6-155) for different exponents n_D (left) and critical displacement jump Δ^c (6-160) and fracture displacement jump Δ^f (6-161) over T (right) for $d_4 = 0.0$—cf [BBB+13, S. 268, Abb. 252] and [P8714, Abb. 6.16]

(6.78)] folgt unter Verwendung von (6-155) – s. [MK16, Gl. $(15)_1$] –

$$D = \left\langle \frac{\Delta^\mathrm{vp} - \Delta^\mathrm{c}}{\Delta^\mathrm{f} - \Delta^\mathrm{c}} \right\rangle^{n_\mathrm{D}} \tag{6-156}$$

mit dem Exponenten n_D, kritischen Verschiebungssprung Δ^c und Bruchverschiebungssprung Δ^f, die in [P8714, S. 206, Gln. (6.81) und (6.82)] analog zur kritischen Gleitung γ_c und Bruchgleitung γ_f definiert werden. In der Schädigungsgleichung (6-156) stellt die MACAULEY-Klammer (6-97) sicher, dass die Schädigungsvariable D für $\Delta^\mathrm{vp} < \Delta^\mathrm{c}$ nicht negativ wird und garantiert, dass die Entwicklung der Schädigung

$$\dot{D} = n_\mathrm{D} \left\langle \frac{\Delta^\mathrm{vp} - \Delta^\mathrm{c}}{\Delta^\mathrm{f} - \Delta^\mathrm{c}} \right\rangle^{n_\mathrm{D}-1} \frac{\dot{\Delta}^\mathrm{vp}}{\Delta^\mathrm{f} - \Delta^\mathrm{c}} \tag{6-157}$$

in Abhängigkeit des viskoelastisch-plastischen Vergleichsverschiebungssprungs Δ^vp (6-155) und dessen Rate

$$\dot{\Delta}^\mathrm{vp} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\Delta}}^\mathrm{vp} \cdot \dot{\boldsymbol{\Delta}}^\mathrm{vp}} \tag{6-158}$$

erst mit Überschreiten des kritischen Verschiebungssprungs Δ^c einsetzt – s [MK16, Gl. $(15)_2$]. In Abbildung 6-20(a) ist der qualitative Verlauf der Schädigungsvariable D als Schar über dem viskoelastisch-plastischen Vergleichsverschiebungssprung Δ^vp (6-155) mit dem Exponenten $n_\mathrm{D} \geq 1$ als Scharparameter dargestellt. Der Exponent n_D beeinflusst die Krümmung des Verlaufs der Schädigungsvariable D zwischen dem kritischen Verschiebungssprung Δ^c und Bruchverschiebungssprung Δ^f.

Die Mehrachsigkeit des Beanspruchungszustands in der Grenzfläche wird im kritischen Verschiebungssprung Δ^c und Bruchverschiebungssprung Δ^f mithilfe einer Größe im Sin-

ne der Spannungsmehrachsigkeit[35] abgebildet, die mit dem lokalen effektiven Grenzflächenspannungsvektor $\hat{\mathbf{t}}$ als Verhältnis zwischen dem Betrag der effektiven Normalspannung $\hat{t}_\mathrm{n}$ (6-130) und resultierenden Schubspannung $\hat{\tau}$ (6-131) mit

$$T := \frac{\langle \hat{t}_\mathrm{n} \rangle}{\sqrt{\hat{t}_\mathrm{n}^2/3 + \hat{\tau}^2}} \tag{6-159}$$

in Anlehnung an [Bur15, S. 109, Gl. (7.104)] definiert wird – s. [MK16, Gl. (16)]. Mit dem Grenzflächenspannungsverhältnis T wird der kritischen Verschiebungssprung mit

$$\Delta^\mathrm{c} = [d_{\mathrm{I}1} + d_{\mathrm{I}2} \exp(-d_3 \langle T \rangle)] \left(1 + d_4 \left\langle \dot{\Delta}/\dot{\Delta}_0 \right\rangle\right) \tag{6-160}$$

in Anlehnung an [JC85] für die Grenzfläche definiert – s. [P8714, S. 206, Gl. (6.81)]. Die Größen $d_{\mathrm{I}1}$, $d_{\mathrm{I}2}$, d_3 und d_4 sind Materialparameter. Die Parameter d_3 und d_4 Steuern den Einfluss des Spannungsverhältnisses T und der Ratenabhängigkeit $\left\langle \dot{\Delta}/\dot{\Delta}_0 \right\rangle$ und die Materialparameter $d_{\mathrm{I}1}$ und $d_{\mathrm{I}2}$ die Länge des kritischen Verschiebungssprungs bei reiner Schubbeanspruchung für $T = 0$. Der Parameter $d_{\mathrm{I}1}$ ist der Grenzwert, gegen den sich der kritische Verschiebungssprung asymptotisch für $T \to \infty$ nähert. Der Bruchverschiebungssprung ist analog dem kritischen Verschiebungssprung mit

$$\Delta^\mathrm{f} = [d_1 + d_2 \exp(-d_3 \langle T \rangle)] \left(1 + d_4 \left\langle \dot{\Delta}/\dot{\Delta}_0 \right\rangle\right) \tag{6-161}$$

und den Materialparametern d_1 und d_2 definiert – s. [P8714, S. 206, Gl. (6.82)]. Die Bedeutung der Materialparameter d_1 und d_2 ist analog zu den Parametern $d_{\mathrm{I}1}$ und $d_{\mathrm{I}2}$ zu verstehen. In Abb. 6-20(b) ist der Einfluss und die Bedeutung der Materialparameter auf die Verläufe des kritischen Verschiebungssprungs (6-160) und Bruchverschiebungssprungs (6-161) in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses (6-159) qualitativ dargestellt. Die Parameter d_3 und d_4 gelten sowohl für den kritischen Verschiebungssprung (6-160) als auch für den Bruchverschiebungssprung (6-161), um eine Überschneidung der beiden Größen über dem Spannungsverhältnis T (6-159) auszuschließen.

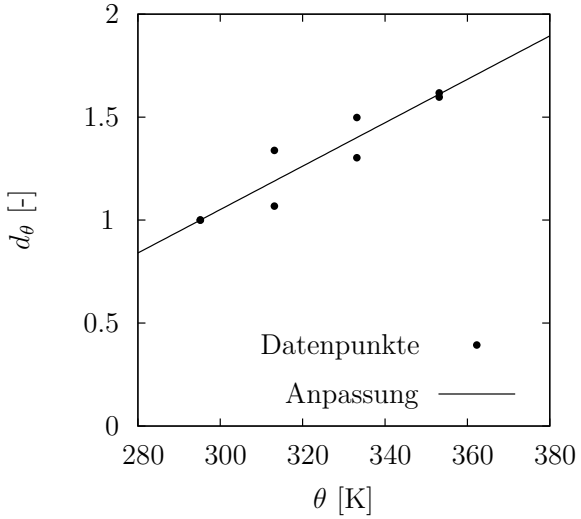


Abbildung 6-21: Temperaturfunktion (6-162) des kritischen und Bruchverschiebungssprungs
Figure 6-21: Temperature function (6-162) of critical und fracture displacement jump

In der vorliegenden Arbeit wird die Ratenabhängigkeit des kritischen Verschiebungssprungs und Bruchverschiebungssprungs nicht weiter betrachtet[36], da hier lediglich quasistatische Beanspruchungen mit Dehn- und Gleitraten in der Größenord-

[35] Anm.: Die klassische Spannungsmehrachsigkeit $\tilde{T} = \frac{\sigma_\mathrm{m}}{\sigma_\mathrm{eq}}$ ist als das Verhältnis zwischen der hydrostatischen Spannung $\sigma_\mathrm{m} = I_1/3$ und der VON MISES-Vergleichsspannung $\sigma_\mathrm{eq} = \sqrt{3 J_2}$ definiert

[36] Hinweis: Der Materialparameter ist im Folgenden $d_4 = 0.0$, da die Ratenterme in (6-160) und (6-161) das Verhalten von Strukturklebstoffen unter Crashbeanspruchung berücksichtigen.

nung von $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ auftreten, die durch Aufheiz- und Abkühlprozesse in der Fertigung und im Betrieb entstehen. Die Gleichungen werden jedoch der Vollständigkeit halber präsentiert und sind Teil des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modells.

Temperaturabhängiger Bruch- und kritischer Verschiebungssprung Der Einfluss der Temperatur θ auf den kritischen Verschiebungssprung Δ^{c} (6-160) und Bruchverschiebungssprung Δ^{f} (6-161) zeigt sich an den Versuchsdaten der quasistatisch zügigen Scher- und Kopfzugversuche des LWF in [P8714, S. 70, Abb. 4.68 und S. 67, Abb. 4.65] bzw. in den Abbn. 7-10(a) und 7-10(b). Anhand der Versuchsdaten ist zu beobachten, dass sich sowohl die Deformation bis zur Schädigungsinitiierung als auch die Deformation bis zum Versagen mit ansteigender Temperatur erhöhen. Jedoch muss hier angemerkt werden, dass die Warmfließkurven aus den Scherzugversuchen nicht vollständig bis zum Versagen der Klebschicht aufgezeichnet worden sind[37]. Zur Berücksichtigung dieses Zusammenhangs wird gemäß des Ansatzes nach [JC85] die lineare Temperaturfunktion

$$d_\theta = \langle 1 + m_{\mathrm{f}} \left(\theta - \theta_0\right) \rangle \tag{6-162}$$

mit der MACAULEY-Klammer (6-97), dem Materialparameter m_{f} und der Raumtemperatur θ_0 als Referenztemperatur definiert, die den kritischen Verschiebungssprung (6-160) und Bruchverschiebungssprung (6-161) mit steigender Temperatur θ erhöht und für $\theta = \theta_0$ identisch eins ist. Demnach folgt für die Gln. (6-160) und (6-161) nach Einsetzen der Temperaturfunktion d_θ (6-162)

$$\Delta^{\mathrm{c}} = \left[d_{\mathrm{I1}} + d_{\mathrm{I2}} \exp\left(-d_3 \left\langle T \right\rangle\right)\right] \langle 1 + m_{\mathrm{f}} \left(\theta - \theta_0\right) \rangle \tag{6-163}$$

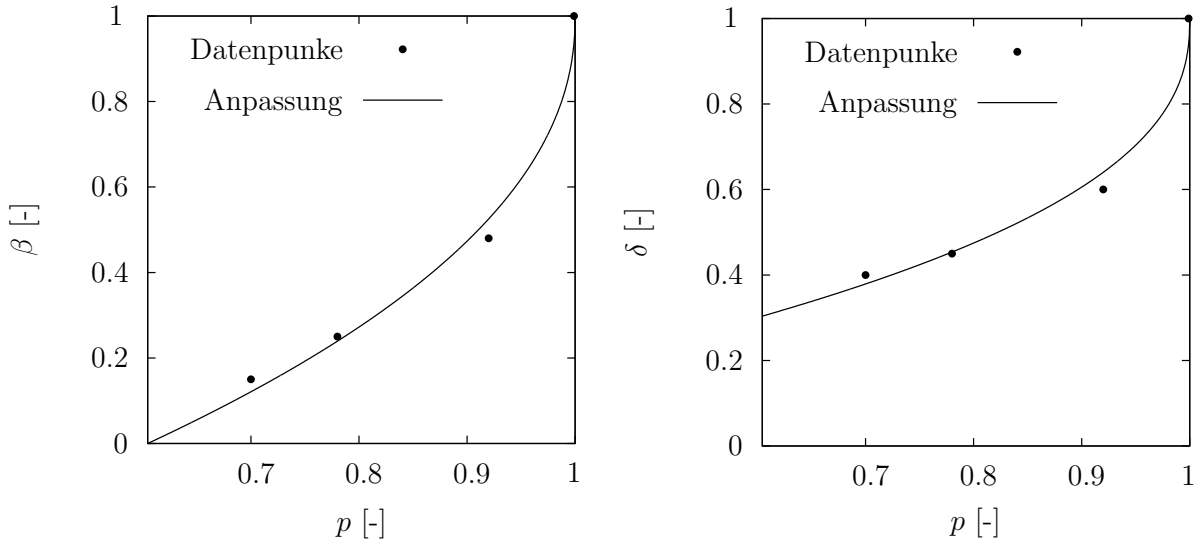
$$\Delta^{\mathrm{f}} = \left[d_1 + d_2 \exp\left(-d_3 \left\langle T \right\rangle\right)\right] \langle 1 + m_{\mathrm{f}} \left(\theta - \theta_0\right) \rangle \quad , \tag{6-164}$$

wobei der ratenabhängigen Term $1 + d_4 \left\langle \dot{\Delta} / \dot{\Delta}_0 \right\rangle$ hier nicht weiter betrachtet wird. Für $\theta = \theta_0$ ist die Temperaturfunktion d_θ in den Gln. (7-17) und (7-18) ein neutrales Element.

Aushärtegradabhängiger Bruch- und kritischer Verschiebungssprung Anhand der Scher- und Kopfzugversuche mit teilgehärteten Klebschichten ist zu beobachten, dass der Aushärtegrad nicht im gleichen Maße auf den kritischen Verschiebungssprung Δ^{c} und Bruchverschiebungssprung Δ^{f} einwirkt, wie es beim Einfluss der Temperatur auf diese beiden Größen der Fall ist – s. Abbn. 7-10(c) und 7-10(d). Daher wird für den kritischen Verschiebungssprung und Bruchverschiebungssprung jeweils eine Potenzfunktion definiert, um den Einfluss des Aushärtegrads p auf die Entfestigung zu beschreiben. Für die Schädigungsinitiierung und das Versagen werden nacheinander die Funktionen

$$\beta(p) = 1 - \left(\frac{1-p}{1-p_{\mathrm{gel}}}\right)^{\beta_1} \quad \text{und} \quad \delta(p) = 1 - \delta_1 \left(\frac{1-p}{1-p_{\mathrm{gel}}}\right)^{\delta_2} \tag{6-165}$$

[37] Hinweis: Fließkurven aus Scherzugversuchen bei Raumtemperatur sind bspw. in [P9515a, S. 54, Abb. 4-31] veröffentlicht und zeigen unter den gleichen Randbedingungen – $d_{\mathrm{k}} = 0.3\,\mathrm{mm}$ und $\frac{\mathrm{d}\tan\gamma}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot 10^{-3}$ – in der Regel einen deutlich längeren Bruchweg als in [P8714, S. 70, Abb. 4.68].



(a) Aushärtegradfunktion für den kritischen Verschiebungssprung

(b) Aushärtegradfunktion für den Bruchverschiebungssprung

Abbildung 6-22: Aushärtegradfunktion des kritischen (links) und Bruchverschiebungssprungs (rechts)
Figure 6-22: Critical (left) and fracture displacement jump (rechts) as function of degree of cure

mit den Exponenten β_1 und δ_2 und dem Steigungsparameter δ_1 definiert. Die Verläufe der beiden Aushärtegradfunktionen Gln. (6-165) sind jeweils in den Abbn. 6-22 über dem Aushärtegrad p zwischen dem Gelpunkt $p = p_{\mathrm{gel}}$ und $p = 1$ zusammen mit den Datenpunkten aus der Anpassung an die Messdaten der Scherzugversuche dargestellt. Aus (7-17) und (7-18) folgen dann mit (6-165)

$$\Delta^{\mathrm{c}} = \left[d_{\mathrm{I}1} + d_{\mathrm{I}2}\exp\left(-d_3\left\langle T\right\rangle\right)\right]\left\langle 1 + m_{\mathrm{f}}\left(\theta-\theta_0\right)\right\rangle\left[1-\left(\frac{1-p}{1-p_{\mathrm{gel}}}\right)^{\beta_1}\right] \tag{6-166}$$

$$\Delta^{\mathrm{f}} = \left[d_1 + d_2\exp\left(-d_3\left\langle T\right\rangle\right)\right]\left\langle 1 + m_{\mathrm{f}}\left(\theta-\theta_0\right)\right\rangle\left[1-\delta_1\left(\frac{1-p}{1-p_{\mathrm{gel}}}\right)^{\delta_2}\right] \tag{6-167}$$

des kritischen Verschiebungssprung und Bruchverschiebungssprung in Abhängigkeit der Temperatur θ und des Aushärtegrads p.

Temperatur- und aushärtegradabhängige Schädigungsevolution Die Evolution der Schädigung D ist abhängig von der Temperatur θ und dem Aushärtegrad p

$$\dot{D}(\theta,p) = n_{\mathrm{D}}\left\langle\frac{\Delta^{\mathrm{vp}}-\Delta^{\mathrm{c}}(\theta,p)}{\Delta^{\mathrm{f}}(\theta,p)-\Delta^{\mathrm{c}}(\theta,p)}\right\rangle^{n_{\mathrm{D}}-1}\frac{\dot{\Delta}^{\mathrm{vp}}}{\Delta^{\mathrm{f}}(\theta,p)-\Delta^{\mathrm{c}}(\theta,p)} \tag{6-168}$$

mit dem kritischen Verschiebungssprung (6-166) und Bruchverschiebungssprung (6-167) als Funktionen der Temperatur θ und des Aushärtegrads p.

Tabelle 6-4: Konstitutivgleichungen des temperatur- und aushärtegradabhängigen Toughened-Adhesive-Polymer-Kohäsivzonenmodells
Table 6-4: Constitutive equations of the temperature and cure dependend Toughened-Adhesive-Polymer cohesive zone model

Bezeichnung	Materialgleichung	Material-parameter
Fließfunktion Gl. (6-138)	$\tilde{f} = \hat{\tau}^2 + \tilde{a}_1\,\tau_{\theta c}\hat{t}_n + \tilde{a}_2(\theta)\,\langle\hat{t}_n\rangle^2 - \tau_y^2(\theta,p,r)$	$\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$
$\tilde{a}_2$ Gl. (6-139)	$\tilde{a}_2(\theta) = \tilde{a}_{20}\,(1 + m_{a2}\,(\theta - \theta_0))$	$\tilde{a}_{20}$, m_{a2}, θ_0
plast. Potential Gl. (6-134)	$\tilde{f}^* = \hat{\tau}^2 + \tilde{a}_2^*\,\langle\hat{t}_n\rangle^2 - \tau_Y^2$	$\tilde{a}_2^*$
Fließregel Gl. (6-135)	$\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{pl} = \lambda\,\frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial\hat{\mathbf{t}}} = 2\,\lambda\,(\tilde{a}_2^*\,\langle\hat{t}_n\rangle\,\mathbf{e}_n + \hat{\tau}\,\mathbf{e}_\tau)$	
plastische Bogenlänge Gl. (6-137)	$\dot{r} = \lambda\,\sqrt{\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{pl}\cdot\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{pl}} = 2\,\lambda\,\sqrt{\left(\tilde{a}_2^*\,\langle\hat{t}_n\rangle\right)^2 + \hat{\tau}^2}$	
Fließspannung (6-142)	$\tau_y(\theta,p,r) = \tau_{\theta c}(\theta,p) + R_{\theta c}(\theta,p,r)$	
Anfangsfließspannung Gln. (6-143), (6-147), (6-152)	$\tau_{\theta c}(\theta,p) = \tau_\theta(\theta)\,\chi_c(p)$ $\tau_\theta = \frac{\tau_0}{2}\,[1 + \tanh(m_\tau\,(\theta_\tau - \theta))]$ $\chi_c = \left(\frac{\langle p - p_{gel}\rangle}{1 - p_{gel}}\right)^{\chi_1}$	τ_0, m_τ, θ_τ, χ_1, p_{gel}
Isotrope Verfestigung Gln. (6-144), (6-151), (6-148), (6-149), (6-150), (6-154)	$R_{\theta c}(\theta,p,r) = R_\theta(\theta,r)\,\phi_c(p)$ mit $R_\theta(\theta) = q_\theta\,[1 - \exp(-b_\theta\,r)] + H_\theta\,r$ $q_\theta(\theta) = \frac{q_0}{2}\left[1 + \tanh\left(m_q\left(\theta_q - \theta\right)\right)\right] + q_1$ $b_\theta(\theta) = \frac{b_0}{2}\,[1 + \tanh(m_b\,(\theta - \theta_b))] + b_1$ $H_\theta(\theta) = \frac{h_0}{2}\,[1 + \tanh(m_h\,(\theta - \theta_h))] + h_1$ und $\phi_c = 1 - \phi_1\,\frac{1-p}{1-p_{gel}}$	q_0, b_0, h_0, m_q, m_b, m_h, θ_q, θ_b, θ_h, q_1, b_1, h_1, ϕ_1
Schädigungsevolution Gl. (6-157)	$\dot{D} = n_D\left\langle\frac{\Delta^{vp} - \Delta^c}{\Delta^f - \Delta^c}\right\rangle^{n_D - 1}\frac{\dot{\Delta}^{vp}}{\Delta^f - \Delta^c}$	n_D
Spannungsverhältnis Gl. (6-159)	$T := \frac{\langle\hat{t}_n\rangle}{\sqrt{\hat{t}_n^2/3 + \hat{\tau}^2}}$	
kritischer Verschiebungssprung und Bruchverschiebungssprung Gln. (6-166), (6-167), (6-162), (6-165)	$\Delta^c = [d_{I1} + d_{I2}\exp(-d_3\,\langle T\rangle)]\,d_\theta(\theta)\,\beta(p)$ $\Delta^f = [d_1 + d_2\exp(-d_3\,\langle T\rangle)]\,d_\theta(\theta)\,\delta(p)$ $d_\theta = \langle 1 + m_f\,(\theta - \theta_0)\rangle$ $\beta(p) = 1 - \left(\frac{1-p}{1-p_{gel}}\right)^{\beta_1}$ $\delta(p) = 1 - \delta_1\,\left(\frac{1-p}{1-p_{gel}}\right)^{\delta_2}$	d_{I1}, d_{I2}, d_1, d_2, d_3, m_f, β_1, δ_1, δ_2, (d_4)

6.7 Implementierung der Materialgleichungen in LS-DYNA
Implementation of the constitutive equations into LS-DYNA

6.7.1 Spannungsalgorithmus
Stress algorithm

Im folgenden Abschnitt wird das Konstitutivmodell numerisch diskretisiert, um es in die Finite-Elemente-Software LS-DYNA in Form eines Spannungsalgorithmus' zu implementieren. Die Konstitutivgleichungen sind in den Tabellen 6-3 und 6-4 zusammengestellt.

Numerische Behandlung des Faltungsintegrals der Überspannungen Das Faltungsintegral zur Berechnung der Überspannung $\mathbf{t}^{\mathrm{ov}}$ wird mit dem rekursiven Einschrittalgorithmus in [TPG70] gelöst. Aufgrund der Analogie wird dieses Vorgehen exemplarisch für die Normalspannung $t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ov}}$ gezeigt. Für die numerische Lösung des Faltungsintegrals (6-103) werden innerhalb des betrachteten Zeitintervals $0 < \tau < t$ zwei Integrationen über die Zeitintervalle $0 < \tau < {}^{(j)}\vartheta$ und ${}^{(j)}\vartheta < \tau < {}^{(j)}\vartheta + \Delta t$ mit ${}^{(j)}\vartheta + \Delta t = t$ durchgeführt. Mit der materiellen Zeit ξ_{n} (6-93) folgt für das betrachtete Zeitinterval $0 < \xi_{\mathrm{n}}(\tau) < \xi_{\mathrm{n}}(t)$ und die Zwischenschritte $0 < \xi_{\mathrm{n}}(\tau) < {}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}\left({}^{(j)}\vartheta\right)$ sowie ${}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}\left({}^{(j)}\vartheta\right) < \xi_{\mathrm{n}}(\tau) < {}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}}\left({}^{(j)}\vartheta + {}^{(j+1)}\Delta t\right)$. Nach Aufspaltung des Zeitintervalls bzgl. des Faltungsintegrals der Überspannung in der Normalspannung (6-103) folgt im aktuellen Zeitschritt ${}^{(j+1)}t$ sukzessiv

$$
\begin{aligned}
{}^{(j+1)}t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ov}} = &\int_{0}^{{}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}} k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}} - \tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \\
&+ \int_{0}^{{}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}}} k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}} - \tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
= &k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \int_{0}^{{}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}} \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \\
&+ k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \int_{{}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}}^{{}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}}} \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
\tag{6-169}
$$

und mit Einführung des Inkrements der materiellen Zeit ${}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}} = {}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}} - {}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}$

$$
{}^{(j+1)}t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ov}} = k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \exp\left(-\frac{{}^{(j)}\xi}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \int_{0}^{{}^{(j)}\xi} \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau +
$$

$$+k\sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\xi}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \int_{{}^{(j)}\xi}^{{}^{(j+1)}\xi} \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{6-170}$$

Durch die Definition der Hilfsvariablen ${}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}}$

$${}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}} = \exp\left(-\frac{{}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \int_{0}^{{}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}} \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-171}$$

und des Inkrements

$${}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{n}} = \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \int_{{}^{(j)}\xi_{\mathrm{n}}}^{{}^{(j+1)}\xi_{\mathrm{n}}} \exp\left(\frac{\tau}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) \frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{6-172}$$

vereinfacht sich Gl. (6-170) zu

$${}^{(j+1)}t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ov}} = k\sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \left[\exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}} + {}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{n}}\right]. \tag{6-173}$$

Zur Lösung des Inkrements der Hilfsvariablen ${}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{n}}$ (6-172) wird die Zeitableitung des lokalen Verschiebungssprungs approximiert zu

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{\mathrm{d}\tau} \approx \frac{{}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}}{{}^{(j+1)}\Delta t}\,. \tag{6-174}$$

Im Folgenden wird angenommen, dass die reduzierte Zeit ξ_{n} linear im Zeitschritt ${}^{(j+1)}\Delta t = {}^{(j+1)}t - {}^{(j)}t$ ist, was mit der Annahme einer im Zeitschritt konstanten Temperatur ${}^{(j+1)}\theta$ einhergeht – s. [TPG70, S. 53]. Dann folgt nach Einsetzen der Näherung (6-174) in Gl. (6-172), Integration und Umstellung

$${}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{n}} = \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right)\right] \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}\right). \tag{6-175}$$

Für die beiden Schubrichtungen folgt analog

$${}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{t}} = \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right)\right] \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}}\right) \tag{6-176}$$

$${}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{b}} = \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right)\right] \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}\right). \tag{6-177}$$

Da die Hilfsvariable zum vergangenen Zeitschritt ${}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}}$ in die Spannung (6-173) einfließt und nicht explizit ausgewertet werden kann, wird sie rekursiv berechnet, d. h. im aktuellen Zeitschritt ${}^{(j+1)}t$ für den folgenden Zeitschritt mit

$$ {}^{(j+1)}d_i^{\mathrm{n}} = {}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}} + {}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{n}} \tag{6-178} $$

bereitgestellt. Nach Einsetzen von (6-175) in (6-173) folgt für die Überspannung in Normalenrichtung

$$ \begin{aligned} {}^{(j+1)}t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ov}} &= k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}} \right) \right] \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} \right) + \\ &\quad + k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}} \\ &= {}^{(j+1)}C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} \right) + {}^{(j)}h_{\mathrm{n}} \end{aligned} \tag{6-179} $$

mit der viskoelastischen Steifigkeit in Normalenrichtung $C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}$ und der Spannungsgeschichte ${}^{(j)}h_{\mathrm{n}}$. Für die Überspannungen in Tangentialen- und Binormalenrichtung folgt analog

$$ \begin{aligned} {}^{(j+1)}t_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ov}} &= g \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) \right] \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}} \right) \\ &\quad + g \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{t}} \\ &= {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}} \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}} \right) + {}^{(j)}h_{\mathrm{t}} \end{aligned} \tag{6-180} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(j+1)}t_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ov}} &= g \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) \right] \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}} \right) \\ &\quad + g \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{b}} \\ &= {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}} \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}} \right) + {}^{(j)}h_{\mathrm{b}} \,. \end{aligned} \tag{6-181} $$

Nach Zusammenfassung der Überspannungen (6-179) bis (6-181) in Vektor-Matrix Schreibweise ergeben sich der Vektor der Spannungsgeschichte

$$ {}^{(j)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M} k_i \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}} \\ \sum_{i=1}^{M} g_i \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{t}} \\ \sum_{i=1}^{M} g_i \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{b}} \end{bmatrix} , \tag{6-182} $$

und die viskoelastische Steifigkeitsmatrix

$$ {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}} = \begin{bmatrix} {}^{(j+1)}C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} & 0 & 0 \\ & {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}} & 0 \\ \text{sym.} & & {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}} \end{bmatrix} . \tag{6-183} $$

Das Inkremente der materiellen Zeiten zum aktuellen Zeitschritt ${}^{(j+1)}t = {}^{(j)}t + {}^{(j+1)}\Delta t$ folgt zu

$$ {}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}} = \frac{{}^{(j+1)}\Delta t}{{}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}\,{}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}} \quad \text{und} \quad {}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}} = \frac{{}^{(j+1)}\Delta t}{{}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}\,{}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}} \tag{6-184} $$

mit den diskreten Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen zur Temperatur ${}^{(j+1)}\theta$ im aktuellen Zeitschritt

$$ {}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}} = \begin{cases} \exp\left(E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{{}^{(j+1)}\theta} - \frac{1}{\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}}\right)\right) & \text{für} \quad {}^{(j+1)}\theta \le \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}} \\ \exp\left(-\frac{C_1^{\mathrm{n}}\left({}^{(j+1)}\theta - \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}\right)}{C_2^{\mathrm{n}} + {}^{(j+1)}\theta - \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}}\right) & \text{für} \quad {}^{(j+1)}\theta > \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}} \end{cases} \tag{6-185} $$

$$ {}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}} = \begin{cases} \exp\left(E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{s}}\left(\frac{1}{{}^{(j+1)}\theta} - \frac{1}{\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}}\right)\right) & \text{für} \quad {}^{(j+1)}\theta \le \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} \\ \exp\left(-\frac{C_1^{\mathrm{s}}\left({}^{(j+1)}\theta - \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}\right)}{C_2^{\mathrm{s}} + {}^{(j+1)}\theta - \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}}\right) & \text{für} \quad {}^{(j+1)}\theta > \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{6-186} $$

und den Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen zum Aushärtegrad ${}^{(j+1)}p$ im aktuellen Zeitschritt

$$ {}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} = \begin{cases} \exp\left[a_3^{\mathrm{n}}\left({}^{(j+1)}p - p_{\mathrm{gel}}\right) - a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{n}}\right] & \forall\, {}^{(j+1)}p < p_{\mathrm{gel}} \\ \exp\left[-a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{n}}\left(a_1^{\mathrm{n}}\right)^{\left({}^{(j+1)}p - p_{\mathrm{gel}}\right)}\left(\frac{p_{\mathrm{R}} - {}^{(j+1)}p}{p_{\mathrm{R}} - p_{\mathrm{gel}}}\right)^{a_2^{\mathrm{n}}}\right] & \forall\, {}^{(j+1)}p \ge p_{\mathrm{gel}} \end{cases} \tag{6-187} $$

$$ {}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}} = \begin{cases} \exp\left[a_3^{\mathrm{s}}\left({}^{(j+1)}p - p_{\mathrm{gel}}\right) - a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{s}}\right] & \forall\, {}^{(j+1)}p < p_{\mathrm{gel}} \\ \exp\left[-a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{s}}\left(a_1^{\mathrm{s}}\right)^{\left({}^{(j+1)}p - p_{\mathrm{gel}}\right)}\left(\frac{p_{\mathrm{R}} - {}^{(j+1)}p}{p_{\mathrm{R}} - p_{\mathrm{gel}}}\right)^{a_2^{\mathrm{s}}}\right] & \forall\, {}^{(j+1)}p \ge p_{\mathrm{gel}} \end{cases} . \tag{6-188} $$

Mit der Spannungsgeschichte (6-182) und der Steifigkeitsmatrix (6-183) ist die Überspannung in Vektor-Matrix Schreibweise

$$ {}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{ov}} = {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}}\left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}}\right) + {}^{(j)}\mathbf{h} . \tag{6-189} $$

Für die Gleichgewichtsspannung ${}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{eq}}$ zum aktuellen Zeitschritt wird die Matrix ${}^{(j+1)}\mathbf{K}_{\infty}$ der Gleichgewichtssteifigkeiten (6-71) zum aktuellen Zeitschritt

$$ {}^{(j+1)}\mathbf{K}_{\infty} = \begin{bmatrix} {}^{(j+1)}k_{\infty} & 0 & 0 \\ & {}^{(j+1)}g_{\infty} & 0 \\ \text{sym.} & 0 & {}^{(j+1)}g_{\infty} \end{bmatrix} \tag{6-190} $$

mit den prozessabhängigen Steifigkeiten

$$ {}^{(j+1)}k_\infty = \hat{k}_\infty \left(\frac{\left\langle {}^{(j+1)}p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2 \right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2} \right)^{\frac{8}{3}} \quad \text{und} \quad {}^{(j+1)}g_\infty = \hat{g}_\infty \left(\frac{\left\langle {}^{(j+1)}p^2 - p_{\mathrm{gel}}^2 \right\rangle}{1 - p_{\mathrm{gel}}^2} \right)^{\frac{8}{3}} \tag{6-191} $$

verwendet, womit die folgende Beziehung zwischen der prozessabhängigen Gleichgewichtsspannung mit der viskoelastischen Verschiebungsdiskontinuität ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}}$ gilt:

$$ {}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{eq}} = {}^{(j)}\mathbf{t}^{\mathrm{eq}} + {}^{(j+1)}\mathbf{K}_\infty \left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} \right) \tag{6-192} $$

Die viskoelastische Spannung ${}^{(j+1)}\mathbf{t}$ wird mit der Gleichgewichtspannung (6-192) und der Überspannung (6-189) zu

$$ {}^{(j+1)}\mathbf{t} = {}^{(j)}\mathbf{t}^{\mathrm{eq}} + {}^{(j+1)}\mathbf{K}_\infty \left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} \right) + {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}} \left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} \right) + {}^{(j)}\mathbf{h} \tag{6-193} $$

zusammenfassend in Vektor-Matrix Notation beschrieben.

6.7.2 Thermo-chemo-viskoelastisch-plastisches Modell – Prädiktor-Korrektor-Verfahren
Thermo-chemo-viscoelastic-plastic model – predictor-corrector method

Die aktuelle thermische Verschiebungsdiskontinuität ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}}$ wird anhand der aktuellen Temperatur ${}^{(j+1)}\theta$ und dem aktuellen Aushärtegrad ${}^{(j+1)}p$ berechnet:

$$ {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}} = {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}} + {}^{(j+1)}\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}\, d_{\mathrm{k}}\, {}^{(j+1)}\Delta\theta\, \mathbf{e}_{\mathrm{n}} \tag{6-194} $$

mit $\mathbf{e}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ und ${}^{(j+1)}\Delta\theta = {}^{(j+1)}\theta - {}^{(j)}\theta$ sowie dem prozessabhängigen Wärmeausdehnungskoeffizienten

$$ {}^{(j+1)}\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}} = \begin{cases} \alpha_1^{\mathrm{th}} & \text{für} \quad {}^{(j+1)}\theta < \theta_{\mathrm{g}} \\ \alpha_2^{\mathrm{th}} + (\alpha_3^{\mathrm{th}} - \alpha_2^{\mathrm{th}})(1 - {}^{(j+1)}p) & \text{für} \quad {}^{(j+1)}\theta \geq \theta_{\mathrm{g}} \end{cases} . \tag{6-195} $$

Die chemische Verschiebungsdiskontinuität berechnet sich mit dem aktuellen Aushärtegrad ${}^{(j+1)}p$ zu

$$ {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ch}} = \frac{d_{\mathrm{k}}}{3} \left(\hat{\beta}_2\, {}^{(j+1)}p - \hat{\beta}_1\, {}^{(j+1)}p^2 \right) \mathbf{e}_{\mathrm{n}} \quad , \tag{6-196} $$

womit die thermochemische Verschiebungsdiskontinuität

$$ {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{tc}} = {}^{(j+1)}\Delta^{\mathrm{tc}}\, \mathbf{e}_{\mathrm{n}} = \left({}^{(j+1)}\Delta^{\mathrm{th}} + {}^{(j+1)}\Delta^{\mathrm{ch}} \right) \mathbf{e}_{\mathrm{n}} = {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}} + {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ch}} \tag{6-197} $$

folgt. Mit der Verschiebungsdiskontinuität ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}$ und der thermochemischen Verschiebungsdiskontinuität ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{tc}}$ wird die aktuelle viskoelastisch-plastische Verschiebungsdiskontinuität ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}}$ wie folgt berechnet:

$$ {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} = {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta} - {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{tc}} \tag{6-198} $$

Damit folgt für die viskoelastische Verschiebungsdiskontinuität aus der Kinematik (6-69) mit der viskoelastisch-plastischen Verschiebungsdiskontinuität (6-198)

$$ {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} = {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} . \tag{6-199} $$

Für das nachfolgend beschriebene Prädiktor-Korrektor-Verfahren steht die lokale Verschiebungsdiskontinuität zum neuen und alten Zeitschritt ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}$ und ${}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}$ aus dem Verschiebungsfeld zur Verfügung. Die gesuchte Größen ist die Spannung ${}^{(j+1)}\mathbf{t}$ zum aktuellen Zeitschritt , die anhand der Materialgleichungen in Form des Spannungsalgorithmus' berechnet wird.

Prädiktor initialisieren Die Prädiktor- bzw. Trialgrößen[38] werden im Folgenden mit dem Superskript $(\bullet)^{\mathrm{tr}}$ gekennzeichnet. Im viskoelastischen Prädiktorschritt werden die plastische Verschiebungsdiskontinuität ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}$ und die plastische Bogenlänge ${}^{(j+1)}r$ zum neuen Zeitschritt mit den Größen aus dem vergangenen Zeitschritt initialisiert – s. [SH98, S. 140].

$$ {}^{(j+1)}\left(\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}\right)^{\mathrm{tr}} = {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \quad , \quad {}^{(j+1)}r^{\mathrm{tr}} = {}^{(j)}r \tag{6-200} $$

In der Spannung (6-193) wird für den viskoelastischen Verschiebungssprung ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}}$ die Beziehung (6-199) verwendet und für den plastischen Verschiebungssprung ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}$ die Prädiktorgröße (6-200) eingesetzt. Für die Spannung folgt dann sukzessiv

$$ \begin{aligned} {}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{tr}} &= {}^{(j)}\mathbf{t}^{\mathrm{eq}} + {}^{(j+1)}\mathbf{K}_{\infty}\left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j+1)}\left(\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}\right)^{\mathrm{tr}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} + {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}\right) + \qquad (6\text{-}201)\\ &\quad + {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}}\left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}}\right) + {}^{(j)}\mathbf{h}\\ &= {}^{(j)}\mathbf{t}^{\mathrm{eq}} + {}^{(j+1)}\mathbf{K}_{\infty}\left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}}\right) + {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}}\left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}}\right) + {}^{(j)}\mathbf{h} \qquad (6\text{-}202) \end{aligned} $$

mit der Gleichgewichtsspannung zum vorherigen Zeitschritt ${}^{(j)}\mathbf{t}^{\mathrm{eq}}$. In der Hilfsvariablen (6-175) und den analog zu berechnenden Hilfsvariablen der Schubrichtungen müssen die viskoelastischen Verschiebungsdiskontinuitäten ${}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}$, ${}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{ve}}$ und ${}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{ve}}$ ebenfalls analog der Beziehung (6-199) ersetzt werden. Aufgrund der inkrementellen Formulierung der Hilfsvariablen (6-175) bis (6-177) verschwindet die Prädiktorgröße des plastischen Verschiebungssprungs $(6\text{-}200)_1$ und es folgt:

$$ {}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{n}} = \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}\left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}\right)\right]\left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{vp}}\right) \tag{6-203} $$

$$ {}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{t}} = \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}\left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}\right)\right]\left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{vp}}\right) \tag{6-204} $$

[38] „trial“ engl. für Versuch

$$ {}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{b}} = \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(- \frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) \right] \left({}^{(j+1)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j)}\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{vp}} \right) \tag{6-205} $$

Prädiktorschritt Im Prädiktorschritt wird im aktuellen Zeitschritt geprüft, ob sich der Trialspannungszustand ${}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{tr}}$ innerhalb oder außerhalb des viskoelastischen Bereichs befindet, indem die Fließfunktion ${}^{(j+1)}\tilde{f}\left({}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{tr}}, {}^{(j+1)}r^{\mathrm{tr}} \right)$ mit den Prädiktorgrößen (6-200) und (6-202) ausgewertet wird. Damit ergeben sich die beiden möglichen Fälle

$$ {}^{(j+1)}\tilde{f}\left({}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{tr}}, {}^{(j+1)}r^{\mathrm{tr}} \right) \begin{cases} \leq 0 & \text{viskoelastischer Schritt} \\ > 0 & \text{plastischer Schritt} \end{cases} . \tag{6-206} $$

Für den Fall, dass sich der Spannungszustand ${}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{tr}}$ innerhalb des viskoelastischen Bereichs befindet gilt für ${}^{(j+1)}\tilde{f} \leq 0$ und die Prädiktorgrößen entsprechen den Größen zum aktuellen Zeitschritt:

$$ {}^{(j+1)}\mathbf{t} = {}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{tr}} \quad , \quad {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} = {}^{(j+1)}\left(\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \right)^{\mathrm{tr}} = {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \quad . \tag{6-207} $$

Die Inkremente der Hilfsvariablen (6-175) bis (6-177) zur rekursiven Berechnung der viskoelastischen Spannungsgeschichte (6-182) ${}^{(j)}\mathbf{h}$ mit den Hilfsvariablen zum alten Zeitschritt ${}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}}$, ${}^{(j)}d_i^{\mathrm{t}}$, ${}^{(j)}d_i^{\mathrm{b}}$ werden mit dem viskoelastisch-plastischen Verschiebungssprung $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} = \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}}$ wie folgt berechnet:

$$ \begin{aligned} {}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{n}} &= \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}} \left[1 - \exp\left(- \frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}} \right) \right] {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{vp}} \\ {}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{t}} &= \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(- \frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) \right] {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{vp}} \\ {}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{b}} &= \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(- \frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) \right] {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{vp}} \end{aligned} \tag{6-208} $$

Der Berechnungsschritt ist dann abgeschlossen – s. [SH98, S. 141]. Für ${}^{(j+1)}\tilde{f} > 0$ hat der Spannungszustand ${}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{tr}}$ die Be- und Entlastungsbedingungen (KUHN-TUCKER-Bedingungen) verletzt. Der Spannungszustand liegt außerhalb des viskoelastischen Bereichs bzw. der aktuellen Fließfläche und für das Inkrement des plastischen Multiplikators gilt ${}^{(j+1)}\Delta\lambda > 0$. Im nächsten Schritt muss der Spannungszustand zurück auf die Fließfläche projiziert werden. Dafür muss das Inkrement des plastischen Multiplikators ${}^{(j+1)}\Delta\lambda$ gesucht werden, dass zur Einhaltung der Fließbedingung ${}^{(j+1)}\tilde{f}\left({}^{(j+1)}\Delta\lambda \right) = 0$ führt.

Korrektorschritt Im Korrektorschritt wird das Inkrement des plastischen Multiplikators ${}^{(j+1)}\Delta\lambda$ zum aktuellen Zeitschritt iterativ über die Fließbedingung $\tilde{f} = 0$ in Form eines Nullstellenproblems mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren bestimmt. Dafür muss in der Spannung die plastische Verschiebungsdiskontinuität zum aktuellen Zeitschritt ${}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}$ berücksichtigt werden.

Viskoelastische Prädiktorspannung

1. Thermische, mechanische und viskoelastische Verschiebungsdiskontinuität:

$$ {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}} = {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}} + {}^{(j+1)}\tilde{\alpha}^{\mathrm{th}}\, d_{\mathrm{k}}\, {}^{(j+1)}\Delta\theta\, \mathbf{e}_{\mathrm{n}} \quad , \quad {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} = {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta} - {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{th}} $$

$$ {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} = {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{ve}} + {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \quad , \quad {}^{(j+1)}\Delta\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} = {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} $$

2. Berechnung der Inkremente der reduzierten Zeit ${}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}$ und ${}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}$ mit den Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen ${}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$ und ${}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$ und den Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen ${}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}$ und ${}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}$:

$$ {}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}} = \frac{{}^{(j+1)}\Delta t}{{}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}\, {}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}} \quad , \quad {}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}} = \frac{{}^{(j+1)}\Delta t}{{}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}\, {}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}} $$

   mit ${}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$, ${}^{(j+1)}a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$, ${}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}}$, ${}^{(j+1)}a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{s}}$ aus den Gln. (6-185), (6-186), (6-187) und (6-188).

3. Berechnung der viskoelastischen Steifigkeitsmatrix ${}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}}$:

$$ {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}} = \begin{bmatrix} {}^{(j+1)}C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} & 0 & 0 \\ & {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}} & 0 \\ \text{sym.} & & {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} $$

$$ {}^{(j+1)}C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}} = k \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{n}} \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}} \right) \right] $$

$$ {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}} = g \sum_{i=1}^{M} v_i^{\mathrm{s}} \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) \right] $$

4. Berechnung des Vektors der Spannungsgeschichte – vgl. Gl. (6-182)

$$ {}^{(j)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M} k_i \exp\left(-\frac{\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}} \\ \sum_{i=1}^{M} g_i \exp\left(-\frac{\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{t}} \\ \sum_{i=1}^{M} g_i \exp\left(-\frac{\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) {}^{(j)}d_i^{\mathrm{b}} \end{bmatrix} $$

5. Berechnung der effektiven Trialspannung – s. (6-202) – mit ${}^{(j+1)}\left(\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}\right)^{\mathrm{tr}} = {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}$ – s. Gl. (6-200):

$$ {}^{(j+1)}\hat{\mathbf{t}}^{\mathrm{tr}} = {}^{(j)}\hat{\mathbf{t}}^{\mathrm{eq}} + \mathbf{K}_{\infty}\, {}^{(j+1)}\Delta\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} + {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}}\, {}^{(j+1)}\Delta\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{vp}} + {}^{(j)}\mathbf{h} $$

Abbildung 6-23: Algorithmus zur Berechnung des viskoelastischen Faltungsintegrals als Prädiktorspannung im Spannungsalgorithmus des thermo-viskoelastisch-plastischen Modells
Figure 6-23: Algorithm of viscoelastic convolution integral as predictor stress in stress algorithm of thermo"=viscoelastic"=plastic model

Nach Einsetzten der Beziehung (6-199) in die Spannung (6-193) unter Berücksichtigung der Trialspannung (6-202) folgt für die Spannung im Korrektorschritt

$$ {}^{(j+1)}\mathbf{t} = {}^{(j+1)}\mathbf{t}^{\mathrm{tr}} - {}^{(j+1)}\mathbf{K}_{\infty} \left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \right) - {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}} \left({}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \right) . \tag{6-209} $$

An dieser Stelle wird aus Gründen der Übersichtlichkeit das Inkrement der plastischen Verschiebungsdiskontinuität eingeführt:

$$ {}^{(j+1)}\Delta\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} = {}^{(j+1)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} - {}^{(j)}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \tag{6-210} $$

Zur Berechnung der viskoelastischen Spannungsgeschichte (6-182) ${}^{(j)}\mathbf{h}$ mit den Hilfsvariablen zum alten Zeitschritt ${}^{(j)}d_i^{\mathrm{n}}$, ${}^{(j)}d_i^{\mathrm{t}}$, ${}^{(j)}d_i^{\mathrm{b}}$ müssen die Inkremente der Hilfsvariablen (6-175) bis (6-177) ebenfalls um den plastischen Anteil der Verschiebungsdiskontinuität korrigiert werden:

$$ \begin{aligned}
{}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{n}} &= \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}} \left[1 - \exp\left(- \frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{n}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}} \right) \right] \left({}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{pl}} \right) \\
{}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{t}} &= \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(- \frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) \right] \left({}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{pl}} \right) \\
{}^{(j+1)}\Delta d_i^{\mathrm{b}} &= \frac{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}}{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}} \left[1 - \exp\left(- \frac{{}^{(j+1)}\Delta\xi_{\mathrm{s}}}{\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}} \right) \right] \left({}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{vp}} - {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{pl}} \right)
\end{aligned} \tag{6-211} $$

Vor der Beschreibung der iterativen Berechnung des Inkrements des plastischen Multiplikators ${}^{(j+1)}\Delta\lambda$ mithilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens, muss an dieser Stelle zunächst die isotrope Schädigung ${}^{(j+1)}D$ zum aktuellen Zeitschritt eingeführt werden, die auf die effektive Spannung

$$ {}^{(j+1)}\hat{\mathbf{t}} = \frac{{}^{(j+1)}\mathbf{t}}{1 - {}^{(j+1)}D} \tag{6-212} $$

zum aktuellen Zeitschritt führt. Das Materialmodell wird innerhalb des Iterationsprozesses im effektiven Spannungsraum betrachtet und die Äquivalenz der Verschiebungsdiskontinuität im physikalischen und effektiven Raum $\Delta = \hat{\Delta}$ sowie der internen viskoelastischen $\Delta^{\mathrm{ve}} = \hat{\Delta}^{\mathrm{ve}}$ und plastischen Verschiebungsdiskontinuität $\Delta^{\mathrm{pl}} = \hat{\Delta}^{\mathrm{pl}}$ wird im Sinne des Dehnungsäquivalenzprinzips angenommen. Aus (6-209) wird mit der Beziehung (6-212) die effektive Spannung zum aktuellen Zeitschritt

$$ \begin{aligned}
{}^{(j+1)}\hat{\mathbf{t}} &= {}^{(j+1)}\hat{\mathbf{t}}^{\mathrm{tr}} - {}^{(j+1)}\mathbf{K}_{\infty}\ {}^{(j+1)}\Delta\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} - {}^{(j+1)(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}}\ {}^{(j+1)}\Delta\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} \\
&= {}^{(j+1)}\hat{\mathbf{t}}^{\mathrm{tr}} - \left({}^{(j+1)}\mathbf{K}_{\infty} + {}^{(j+1)}\mathbf{C}^{\mathrm{ve}} \right)\ {}^{(j+1)}\Delta\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}}
\end{aligned} \tag{6-213} $$

gebildet, die in Komponenten dargestellt die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned}
{}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}} &= {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{tr}} - \left({}^{(j+1)}k_{\infty} + {}^{(j+1)}C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ve}}\right) {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{n}}^{\mathrm{pl}} \\
{}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{t}} &= {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tr}} - \left({}^{(j+1)}g_{\infty} + {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}}\right) {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{pl}} \\
{}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{b}} &= {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{tr}} - \left({}^{(j+1)}g_{\infty} + {}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}}\right) {}^{(j+1)}\Delta\Delta_{\mathrm{b}}^{\mathrm{pl}}
\end{aligned} \tag{6-214}$$

Die effektiven Schubspannungen ${}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{t}}$, ${}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{b}}$ und deren Trialspannungen ${}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tr}}$, ${}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{tr}}$ werden jeweils zusammengefasst in die resultierenden Schubspannungen

$${}^{(j+1)}\hat{\tau} = \sqrt{{}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{t}}{}^2 + {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{b}}{}^2} \quad \text{und} \quad {}^{(j+1)}\hat{\tau}^{\mathrm{tr}} = \sqrt{{}^{(j+1)}(\hat{t}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tr}})^2 + {}^{(j+1)}(\hat{t}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{tr}})^2}\,. \tag{6-215}$$

Die Fließfunktion und das plastisches Potential des reduzierten TAPO-Modells aus [Bur15, S. 107 f., Gln. (7.98), (7.99)] sind

$$\begin{aligned}
{}^{(j+1)}\tilde{f} &= {}^{(j+1)}\hat{\tau}^2 + \tilde{a}_1\, {}^{(j+1)}\tau_{\theta\mathrm{c}}\, {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}} + {}^{(j+1)}\tilde{a}_2 \left\langle {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}} \right\rangle^2 - {}^{(j+1)}\tau_{\mathrm{y}}{}^2 \quad \text{und} \\
{}^{(j+1)}\tilde{f}^{*} &= {}^{(j+1)}\hat{\tau}^2 + \tilde{a}_2^{*} \left\langle {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}} \right\rangle^2 - {}^{(j+1)}\tau_{\mathrm{y}}{}^2 \quad .
\end{aligned} \tag{6-216}$$

Aus dem plastischen Potential (6-216)$_2$ folgt die zeitliche Änderung der plastischen Verschiebungsdiskontinuität $\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{pl}}$ im Sinne des plastischen Flusses im effektiven Spannungsraum mit dem plastischen Multiplikator λ zu

$$\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{pl}} = \lambda \frac{\partial \tilde{f}^{*}}{\partial \hat{\mathbf{t}}} = 2\lambda \left(\tilde{a}_2^{*} \langle \hat{t}_{\mathrm{n}} \rangle\, \mathbf{e}_{\mathrm{n}} + \hat{\tau}\, \mathbf{e}_{\tau}\right). \tag{6-217}$$

Das Inkrement der plastischen Verschiebungsdiskontinuität (6-217) zum aktuellen Zeitschritt ist dann

$${}^{(j+1)}\Delta\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{pl}} = {}^{(j+1)}\Delta\lambda\, \frac{\partial\, {}^{(j+1)}\tilde{f}^{*}}{\partial\, {}^{(j+1)}\hat{\mathbf{t}}} = 2\, {}^{(j+1)}\Delta\lambda \left(\tilde{a}_2^{*} \left\langle {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}} \right\rangle \mathbf{e}_{\mathrm{n}} + {}^{(j+1)}\hat{\tau}\, \mathbf{e}_{\tau}\right) \tag{6-218}$$

und die interne Variable vom Dehnungstyp in der Form einer plastischen Bogenlänge sowie deren Inkrement folgen aus (6-217) bzw. (6-218) zu

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\partial \tilde{f}^{*}}{\partial \hat{\mathbf{t}}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^{*}}{\partial \hat{\mathbf{t}}}} = 2\lambda \sqrt{\left(\tilde{a}_2^{*} \langle \hat{t}_{\mathrm{n}} \rangle\right)^2 + \hat{\tau}^2} \quad \text{und} \tag{6-219}$$

$${}^{(j+1)}\Delta r = 2\, {}^{(j+1)}\Delta\lambda \sqrt{\left(\tilde{a}_2^{*} \left\langle {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}} \right\rangle\right)^2 + {}^{(j+1)}\hat{\tau}^2}\,. \tag{6-220}$$

In den Gln. (6-216) ist ${}^{(j+1)}\tau_{\mathrm{y}}$ die Fließspannung, die sich aus der Anfangsfließspannung ${}^{(j+1)}\tau_{\theta}$ und der Verfestigungsspannung ${}^{(j+1)}R$ zusammensetzt:

$${}^{(j+1)}\tau_{\mathrm{y}} = {}^{(j+1)}\tau_{\theta\mathrm{c}} + {}^{(j+1)}R_{\theta\mathrm{c}} \tag{6-221}$$

mit ${}^{(j+1)}\tau_{\theta c} = {}^{(j+1)}\tau_\theta \, {}^{(j+1)}\chi_c$ und ${}^{(j+1)}R_{\theta c} = {}^{(j+1)}R_\theta \, {}^{(j+1)}\phi_c$. Für den temperatur- und aushärtegradabhängigen Anteil der Anfangsfließspannung folgt

$$ {}^{(j+1)}\tau_\theta = \frac{\tau_0}{2}\left[1+\tanh\left(m_\tau\left(\theta_\tau - {}^{(j+1)}\theta\right)\right)\right] \tag{6-222} $$

$$ {}^{(j+1)}\chi_c = \left(\frac{\left\langle {}^{(j+1)}p - p_{gel}\right\rangle}{1-p_{gel}}\right)^{\chi_1} . \tag{6-223} $$

Die Spannung der isotropen temperaturabhängigen Verfestigung ${}^{(j+1)}R_\theta$ setzt sich aus einem nichtlinearen und linearen Term zusammen:

$$ {}^{(j+1)}R_\theta = {}^{(j+1)}q_\theta\left[1-\exp\left(-{}^{(j+1)}b_\theta \, {}^{(j+1)}r\right)\right] + {}^{(j+1)}H_\theta \, {}^{(j+1)}r \tag{6-224} $$

Die Materialparameter der nichtlinearen isotropen Verfestigung werden mithilfe der folgenden empirischen Gleichungen in Abhängigkeit von der Temperatur θ für den aktuellen Zeitschritt berechnet:

$$ \begin{aligned} {}^{(j+1)}q_\theta &= \frac{q_0}{2}\left\{1+\tanh\left[m_q\left(\theta_q - {}^{(j+1)}\theta\right)\right]\right\} + q_1 \\ {}^{(j+1)}b_\theta &= \frac{b_0}{2}\left\{1+\tanh\left[m_b\left({}^{(j+1)}\theta - \theta_b\right)\right]\right\} + b_1 \\ {}^{(j+1)}H_\theta &= \frac{h_0}{2}\left\{1+\tanh\left[m_h\left({}^{(j+1)}\theta - \theta_h\right)\right]\right\} + h_1 \end{aligned} \tag{6-225} $$

Der aushärtegradabhängige Anteil der isotropen Verfestigung ist

$$ {}^{(j+1)}\phi_c = 1 - \phi_1 \frac{1-{}^{(j+1)}p}{1-p_{gel}} \tag{6-226} $$

zum aktuellen Zeitschritt. Einsetzen der Normalenrichtung des Inkrements (6-218) in die Spannung (6-214)$_1$ und Umstellen nach der Normalspannung ${}^{(j+1)}\hat{t}_n$ führt auf

$$ {}^{(j+1)}\hat{t}_n = \frac{{}^{(j+1)}\hat{t}_n^{tr}}{1+2\,{}^{(j+1)}\Delta\lambda\,\tilde{a}_2^*\,{}^{(j+1)}H^{\hat{t}_n}\left({}^{(j+1)}k_\infty + {}^{(j+1)}C_n^{ve}\right)} \tag{6-227} $$

mit $\left\langle {}^{(j+1)}\hat{t}_n\right\rangle = {}^{(j+1)}H^{\hat{t}_n} \, {}^{(j+1)}\hat{t}_n$ und

$$ {}^{(j+1)}H^{\hat{t}_n} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad {}^{(j+1)}\hat{t}_n \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad {}^{(j+1)}\hat{t}_n < 0 \end{cases} . $$

Für die tangentiale und binormale Spannungskomponente folgt aus (6-214)$_2$ und (6-214)$_3$ nach Einsetzen der Tangentialen- und Binormalenrichtung von (6-218)

$$\begin{aligned} {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{t}} &= \frac{{}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{tr}}}{1+2\,{}^{(j+1)}\Delta\lambda\,\left({}^{(j+1)}g_{\infty}+{}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}}\right)} \quad , \\ {}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{b}} &= \frac{{}^{(j+1)}\hat{t}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{tr}}}{1+2\,{}^{(j+1)}\Delta\lambda\,\left({}^{(j+1)}g_{\infty}+{}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}}\right)} \end{aligned} \tag{6-228}$$

und nach Anwendung der Beziehungen (6-215) auf (6-228)

$${}^{(j+1)}\hat{\tau} = \frac{{}^{(j+1)}\hat{\tau}^{\mathrm{tr}}}{1+2\,{}^{(j+1)}\Delta\lambda\,\left({}^{(j+1)}g_{\infty}+{}^{(j+1)}C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ve}}\right)}\,. \tag{6-229}$$

Spannungskorrektur – NEWTON-RAPHSON-Verfahren Die Spannungen (6-227) bis (6-229) liegen in expliziter Form vor, weshalb im NEWTON-RAPHSON-Verfahren nur das Inkrement des plastischen Multiplikators ${}^{(j+1)}\Delta\lambda$ unter Einhaltung der Fließbedingung ${}^{(j+1)}\tilde{f}\left({}^{(j+1)}\Delta\lambda\right)=0$ gelöst werden muss. Dafür wird die Fließbedingung in Form eines Nullstellenproblems mit dem Residuum ${}^{(j+1)}R^{\mathrm{f}}\left({}^{(j+1)}\Delta\lambda\right)$ formuliert:

$${}^{(j+1)}\tilde{f}\left({}^{(j+1)}\Delta\lambda\right)=0={}^{(j+1)}R^{\mathrm{f}}\left({}^{(j+1)}\Delta\lambda\right) \tag{6-230}$$

Die Iterationsvorschrift des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens für das Inkrement des plastischen Multiplikators ist dann mit dem Iterationszähler k

$${}^{(j+1)}_{(k+1)}\Delta\lambda = {}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda - {}^{(j+1)}_{(k)}R^{\mathrm{f}}\left({}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda\right)\left[\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}R^{\mathrm{f}}\left({}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda\right)}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda}\right]^{-1} \quad . \tag{6-231}$$

Im NEWTON-RAPHSON-Verfahren ((6-231)) muss die Ableitung des Residuums ${}^{(j+1)}_{(k)}R^{\mathrm{f}}$ bzw. der Fließfunktion (6-216)$_1$ ${}^{(j+1)}_{(k)}\tilde{f}$ nach dem Inkrement des plastischen Multiplikators ${}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda$ zum aktuellen Zeitschritt $(j+1)$ und zur k-ten Iteration berechnet werden. Bei der Ableitung der Fließfunktion $\tilde{f}$ wird die Kettenregel angewendet:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}R^{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} = \frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\tilde{f}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} &= 2\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} + \tilde{a}_1\,{}^{(j+1)}\tau_{\theta\mathrm{c}}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} + \\ &+ 2\,{}^{(j+1)}\tilde{a}_2\,{}^{(j+1)}_{(k)}H^{\hat{t}_{\mathrm{n}}}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_{\mathrm{n}}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} - 2\,{}^{(j+1)}_{(k)}\tau_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\tau_{\mathrm{y}}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} \end{aligned} \tag{6-232}$$

Es folgen die einzelnen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} &= -\frac{2\left({}^{(j+1)}g_\infty + {}^{(j+1)}C_\mathrm{s}^\mathrm{ve}\right)}{1+2\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda\left({}^{(j+1)}g_\infty + {}^{(j+1)}C_\mathrm{s}^\mathrm{ve}\right)}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau} \\
\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_\mathrm{n}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} &= -\frac{2\,\tilde{a}_2^*\,{}^{(j+1)}_{(k)}H^{\hat{t}_\mathrm{n}}\left({}^{(j+1)}k_\infty + {}^{(j+1)}C_\mathrm{n}^\mathrm{ve}\right)}{1+2\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda\,\tilde{a}_2^*\,{}^{(j+1)}_{(k)}H^{\hat{t}_\mathrm{n}}\left({}^{(j+1)}k_\infty + {}^{(j+1)}C_\mathrm{n}^\mathrm{ve}\right)}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_\mathrm{n} \\
\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\tau_\mathrm{y}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} &= \frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\tau_\mathrm{y}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}R}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}R}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}R_\theta}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}R_\theta}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}r}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}r}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} = \\
&= {}^{(j+1)}\phi_\mathrm{c}\left[{}^{(j+1)}q_\theta\,{}^{(j+1)}b_\theta\exp\left(-{}^{(j+1)}b_\theta\,{}^{(j+1)}_{(k)}r\right) + {}^{(j+1)}H_\theta\right]\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}r}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} \quad .
\end{aligned} \tag{6-233}$$

Nach Einsetzen der Ableitungen (6-233) in Gl. (6-232) muss für die Ableitung $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\Delta\lambda}$ in (6-233)$_3$ die interne Variable r zu ${}^{(j+1)}r = {}^{(j)}r + \Delta r$ linearisiert werden. Damit folgt dann für die Ableitung des Inkrements der internen Variable (6-220) sukzessiv

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}r}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} &= \frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta r}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} = \\
&= 2\sqrt{\left(\tilde{a}_2^*\left\langle{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_\mathrm{n}\right\rangle\right)^2 + {}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau}^2} + \frac{2\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda}{\sqrt{\left(\tilde{a}_2^*\left\langle{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_\mathrm{n}\right\rangle\right)^2 + {}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau}^2}} \\
&\quad \left[\tilde{a}_2^*\,{}^{(j+1)}_{(k)}H^{\hat{t}_\mathrm{n}}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_\mathrm{n}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_\mathrm{n}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} + {}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau}\,\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{6-234}$$

Im NEWTON-RAPHSON-Verfahren werden die Gleichungen solange iteriert, wie das Residuum (6-230) größer ist als eine definierte Toleranz ε_tol. Damit folgt als Abbruchkriterium für das NEWTON-RAPHSON-Verfahren:

$${}^{(j+1)}_{(k+1)}R^\mathrm{f} < \varepsilon_\mathrm{tol} \tag{6-235}$$

Eine Übersicht über den Algorithmus für die Spannungskorrektur beim Eintreten von plastischen Fließen für $\tilde{f} > 0$ ist in Abb. 6-24 dargestellt. Eine Übersicht des gesamten Spannungsalgorithmus' liefert der Ablaufplan in Abb. 6-25.

Spannungskorrektur – NEWTON-RAPHSON-Verfahren

1. Initialisierung der Variablen für das NEWTON-RAPHSON-Verfahren:

$$k = 0\,,\ {}^{(j+1)}_{(0)}\Delta\lambda = 0\,,\ {}^{(j+1)}_{(k)}\hat{t}_{\mathrm{n}} = {}^{(j+1)}\hat{t}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{n}}\,,\ {}^{(j+1)}_{(k)}\hat{\tau} = {}^{(j+1)}\hat{\tau}^{\mathrm{tr}}$$

2. Berechnung der Ableitung des Residuums ${}^{(j+1)}_{(k)}R^{\mathrm{f}}$ nach dem Inkrement des plastischen Multiplikators ${}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda$ – s. Gln. (6-232) bis (6-234):

$$\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}R^{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda} = \frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\tilde{f}}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda}$$

3. Aktualisierung des Inkrements des plastischen Multiplikators:

$${}^{(j+1)}_{(k+1)}\Delta\lambda = {}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda - {}^{(j+1)}_{(k)}R^{\mathrm{f}}\left({}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda\right)\left[\frac{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}R^{\mathrm{f}}\left({}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda\right)}{\mathrm{d}\,{}^{(j+1)}_{(k)}\Delta\lambda}\right]^{-1}$$

4. Berechnung des aktuellen Spannungszustands – s. Gln. (6-228) und (6-229):

$${}^{(j+1)}_{(k+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}} = \frac{{}^{(j+1)}\hat{t}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{n}}}{1 + 2\,{}^{(j+1)}_{(k+1)}\Delta\lambda\,\tilde{a}^{*}_{2}\,{}^{(j+1)}_{(k)}H^{\hat{t}_{\mathrm{n}}}\left({}^{(j+1)}k_{\infty} + {}^{(j+1)}C^{\mathrm{ve}}_{\mathrm{n}}\right)}$$

$${}^{(j+1)}_{(k+1)}\hat{\tau} = \frac{{}^{(j+1)}\hat{\tau}^{\mathrm{tr}}}{1 + 2\,{}^{(j+1)}_{(k+1)}\Delta\lambda\,\left({}^{(j+1)}g_{\infty} + {}^{(j+1)}C^{\mathrm{ve}}_{\mathrm{s}}\right)}$$

5. Aktualisierung der plastischen Bogenlänge:

$${}^{(j+1)}_{(k+1)}\Delta r = 2\,{}^{(j+1)}_{(k+1)}\Delta\lambda\,\sqrt{\left(\tilde{a}^{*}_{2}\left\langle{}^{(j+1)}_{(k+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}}\right\rangle\right)^{2} + {}^{(j+1)}_{(k+1)}\hat{\tau}^{2}}$$

$${}^{(j+1)}_{(k+1)}r = {}^{(j)}r + {}^{(j+1)}_{(k+1)}\Delta r$$

6. Überprüfung des Residuums ${}^{(j+1)}_{(k+1)}R^{\mathrm{f}}$ für das Abbruchkriterium des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens:

$${}^{(j+1)}_{(k+1)}R^{\mathrm{f}} = {}^{(j+1)}_{(k+1)}\hat{\tau}^{2} + \tilde{a}_{1}\,{}^{(j+1)}\tau_{\theta}\,{}^{(j+1)}_{(k+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}} + {}^{(j+1)}\tilde{a}_{2}\left\langle{}^{(j+1)}_{(k+1)}\hat{t}_{\mathrm{n}}\right\rangle^{2} - {}^{(j+1)}_{(k+1)}{\tau_{\mathrm{y}}}^{2}$$

IF: $\left|{}^{(j+1)}_{(k+1)}R^{\mathrm{f}}\right| > \varepsilon_{\mathrm{tol}}$ **THEN**: Setze $k \leftarrow k+1$ und **GO TO** 2.

Abbildung 6-24: Algorithmus für die Spannungskorrektur beim Auftreten von plastischem Fließen
Figure 6-24: Algorithm of stress correction during plastic flow

Spannungsalgorithmus

1. Initialisierung der plastischen Bogenlänge

$$\overset{(j+1)}{\underset{(0)}{r}} = \overset{(j)}{} r$$

2. Lösung der Differentialgleichung des Aushärtegrads p

3. Berechnung der viskoelastischen Prädiktorspannung – s. Abb. 6-23

4. Berechnung der temperatur- und aushärtegradabhängigen Funktionen $\tau_{\theta \mathrm{c}}$, q_θ, b_θ, H_θ und ϕ_c – s. Gln. (6-222), (6-223), (6-225) und (6-226):

5. Überprüfung des Fließkriteriums (6-206) mit den Initial- und Trialgrößen:

$$\overset{(j+1)}{} \tilde{f} = \left(\overset{(j+1)}{} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{tr}} \right)^2 + \tilde{a}_1 \overset{(j+1)}{} \tau_{\theta \mathrm{c}} \overset{(j+1)}{} \hat{t}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{tr}} + \overset{(j+1)}{} \tilde{a}_2 \left\langle \overset{(j+1)}{} \hat{t}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{tr}} \right\rangle^2 - \overset{(j+1)}{} \tau_{\mathrm{y}}{}^2$$

   IF: $\overset{(j+1)}{} \tilde{f} \left(\overset{(j+1)}{} \hat{t}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{tr}}, \overset{(j+1)}{} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{tr}}, \overset{(j+1)}{\underset{(0)}{r}} \right) > \varepsilon_{\mathrm{tol}}$ **THEN**: **GO TO** 6.
   ELSE: **GO TO** 10.

6. Plastischer Schritt: Spannungskorrektur – s. Abb. 6-24

7. Berechnung der Schädigungsvariablen $\overset{(j+1)}{} D$:

8. Auswertung der Rekursionsgleichung – s. Gln. (6-211):

$$\overset{(j+1)}{\underset{(k+1)}{\mathbf{d}_i}} = \overset{(j)}{} \mathbf{d}_i + \overset{(j+1)}{\underset{(k+1)}{\Delta \mathbf{d}_i}}$$

9. Berechnung der nominellen Spannung

$$\overset{(j+1)}{\underset{(k+1)}{\mathbf{t}}} = \left(1 - \overset{(j+1)}{\underset{(k+1)}{D}} \right) \overset{(j+1)}{\underset{(k+1)}{\hat{\mathbf{t}}}}$$

   RETURN

10. Elastischer Schritt: Auswertung der Rekursionsgleichung – s. Gln. (6-208):

$$\overset{(j+1)}{} \mathbf{d}_i = \overset{(j)}{} \mathbf{d}_i + \overset{(j+1)}{} \Delta \mathbf{d}_i$$

11. Berechnung der Schädigungsvariablen $\overset{(j+1)}{} D$:

12. Berechnung der nominellen Spannung

$$\overset{(j+1)}{} \mathbf{t} = \left(1 - \overset{(j+1)}{} D \right) \overset{(j+1)}{} \hat{\mathbf{t}}^{\mathrm{tr}}$$

    RETURN

Abbildung 6-25: Spannungsalgorithmus
Figure 6-25: Stress algorithm

7 Parameteridentifikation und Verifikation Parameter identification and verification

Patrick Kühlmeyer, Anton Matzenmiller

Die Parameteridentifikation und Verifikation des Konstitutivmodells für warmhärtende duktil modifizierte Strukturklebstoffe auf Epoxidharzbasis in bimetallischen Strukturklebverbindungen wird im Folgenden erläutert. Für die Identifikation des zeitabhängigen Materialverhaltens vor der Fließgrenze werden Messdaten des LWF aus der DMA und quasistatisch zügigen Versuchen an Grundproben verwendet. Die Materialparameter des Materialmodells nach Überschreiten der Fließgrenze werden anhand von Warmfließkurven und Fließkurven aus Versuchen mit teilgehärteten Klebschichten identifiziert. Der Identifikationsprozess wird sukzessiv beschrieben und die Zwischenergebnisse werden aufgeführt.

In the present chapter, the parameter identification and verification is explained for the constitutive model of heat-curing ductile modified structural epoxy-based adhesives in bimetallic bonds. Data of DMA and quasi static tests are used to identify the material parameters of the time dependend material behaviour below the yield threshold. Beyond the yield theshold, the material parameters are identified using test data of quasi static tests for different temperatures and degrees of cure.

7.1 Parameter des Thermo-chemo-viskoelastischen Modellteils Parameters of the thermo-chemo-viscoelastic model part

7.1.1 Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip Time-temperature shift principle

Die Parameter des thermo-viskoelastischen Modellteils sind am LWF der Universität Paderborn mittels Dynamisch-mechanischer Analysen (DMA) an ausgehärteten Klebstoffsubstanzproben identifiziert worden – Kaptiel 4.2.1. Dabei werden die Substanzproben unter harmonisch wechselnder Dehnung $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(i\,\omega t)$ bzw. Gleitung $\gamma = \gamma_0 \exp(i\,\omega t)$[1] mit verschiedenen Frequenzen ω angeregt und zusätzlich einem linearen Zeit-Temperaturverlauf $\theta(t)$ ausgesetzt. Unter Annahme eines thermorheologisch einfachen Materialverhaltens werden unter Verwendung der Zeit-Temperatur-Verschiebungsmethode die Messkurven verschiedener Isothermen – die in einem festgelegten Frequenzband zwischen ω_u und ω_o gemessen werden – über der Frequenzachse zu einer stetigen Masterkurve bzgl. einer ausgewählten Referenztemperatur $\theta_\mathrm{R}^\mathrm{n}$ zusammengeschoben, wie in Abb. 7-1 qualitativ am Beispiel eines zeitabhängigen Elastizitätsmoduls dargestellt. Im

[1] Komplexe Einheit einer komplexen Zahl: $i^2 = -1$

Zuge dessen wird der Frequenzbereich der Messdaten erweitert und gleichzeitig die Temperaturabhängigkeit der zeitabhängigen Module untersucht – [Sch90, S. 202 ff.]. In [Fer80, S. 273] werden für die Anwendung des Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzips bzw. der Methode der reduzierten Variablen die drei folgenden Kriterien angegeben:

- Stetiger Verlauf der aus den Isothermen zusammengeschobenen Masterkurve
- Die viskoelastischen Funktionen lassen sich jeweils mit einer Verschiebungsfunktion deckungsgleich überlagern
- Die Verschiebungsfunktion $a_\mathrm{T}(\theta)$ muss einen Erfahrungsgemäß sinnvollen Verlauf haben – bspw. WLF-Funktion nach [WLF55]

Demnach werden die Amplituden ε_0 und γ_0 für die Anregung der Substanzproben so gewählt, dass die Theorie kleiner Deformationen der Kontinuumsmechanik Anwendung findet und das Materialverhalten näherungsweise materiell linear ist[2]. An die erstellten Masterkurven aus den Messdaten der DMA – die mithilfe der Messmethoden „dual cantilever bending“ für den zeitabhängigen Elastizitäts- und „shear sandwich“ für den zeitabhängigen Schubmodul erstellt worden sind – werden jeweils der frequenzabhängige komplexe Elastizitäts- $\tilde{E}^*$ und Schubmodul $\tilde{G}^*$ der linearen Viskoelastizitätstheorie

$$\tilde{E}^*(\omega;\theta_\mathrm{R}^\mathrm{n},p_\mathrm{R}) = \hat{E}_\infty + i\,\omega \int_0^\infty \left[\tilde{E}(s;\theta_\mathrm{R}^\mathrm{n},p_\mathrm{R}) - \hat{E}_\infty\right] \exp\left(-i\,\omega\,s\right) \mathrm{d}s \tag{7-1}$$

$$\tilde{G}^*(\omega;\theta_\mathrm{R}^\mathrm{s},p_\mathrm{R}) = \hat{G}_\infty + i\,\omega \int_0^\infty \left[\tilde{G}(s;\theta_\mathrm{R}^\mathrm{s}p_\mathrm{R}) - \hat{G}_\infty\right] \exp\left(-i\,\omega\,s\right) \mathrm{d}s \tag{7-2}$$

für die Referenzzustände des vollständig ausgehärteten Klebstoffs $p = p_\mathrm{R} = 1$ bei den Referenztemperaturen $\theta_\mathrm{R}^\mathrm{n}$ und $\theta_\mathrm{R}^\mathrm{s}$ angepasst, um mittels der Transformationseigenschaften in der linearen Viskoelastizitätstheorie die zeitabhängigen Materialfunktionen des

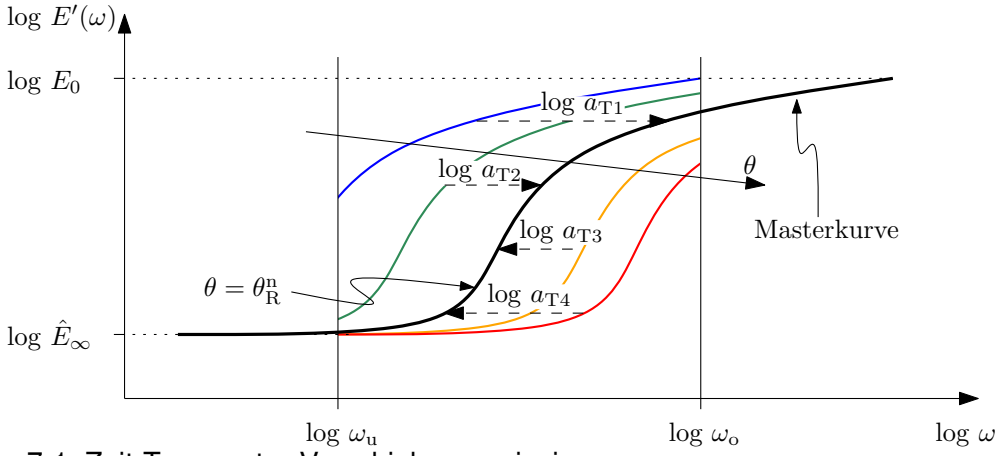
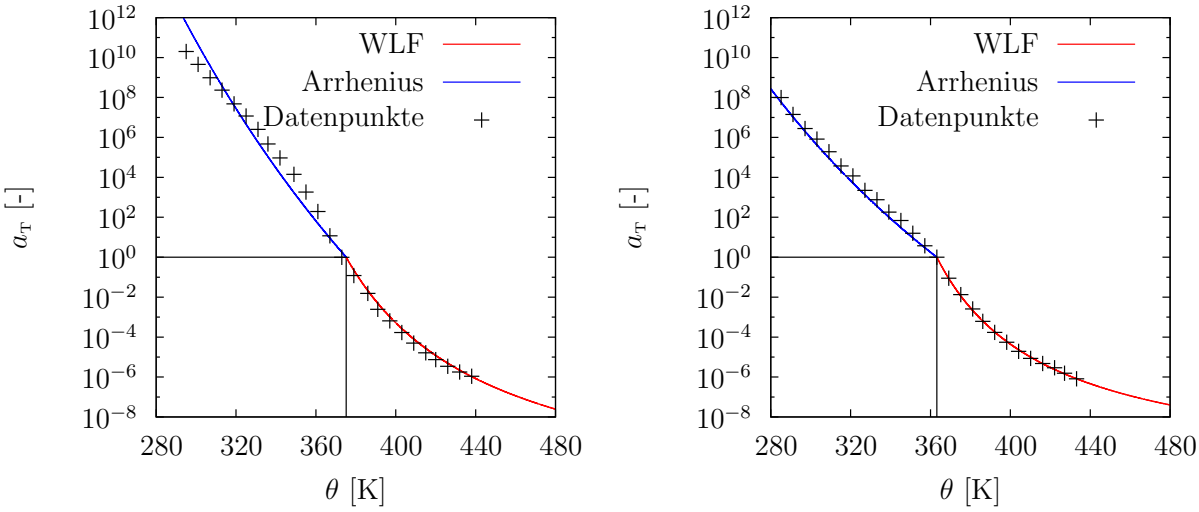


Abbildung 7-1: Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip
Figure 7-1: Time-temperature shift principle

[2] Für die Anwendung der Transformationseigenschaften zwischen dem Zeit- und Frequenzbereich ist die lineare Viskoelastizitätstheorie Voraussetzung.



(a) Aus DMA „dual cantilever bending“ (b) Aus DMA „shear sandwich“

Abbildung 7-2: Verläufe der Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen (6-90) und (6-91) mit den Materialparametern in Tabelle 7-1 und den Zeit-Temperatur-Verschiebungsfaktoren über der Temperatur θ
Figure 7-2: Courses of time-temperature shift functions (6-90) and (6-91) with parameters in Tabelle 7-1 and time-temperature shift factors over temperature θ

Klebstoffs zu bestimmen – vgl. Kapitel 6.4. Unter Vorgabe diskreter Relaxationsspektren in Form der DIRICHLET-PRONY-Reihen für die jeweiligen Referenzzustände

$$\tilde{E}(t;\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}},p_{\mathrm{R}}) = \hat{E}_{\infty} + \sum_{k=1}^{M} E_k \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}}}\right) \tag{7-3}$$

$$\tilde{G}(t;\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}},p_{\mathrm{R}}) = \hat{G}_{\infty} + \sum_{k=1}^{M} G_k \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_k^{\mathrm{s}}}\right) \tag{7-4}$$

als Materialfunktionen folgt dann am Beispiel des komplexen Elastizitätsmodul (7-1) sukzessiv für den

$$\tilde{E}^{*}(\omega;\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}},p_{\mathrm{R}}) = \hat{E}_{\infty} + i\,\omega \sum_{k=1}^{M} E_k \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{1}{\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}}} + i\,\omega\right) s\right] \mathrm{d}s \tag{7-5}$$

Tabelle 7-1: Materialparameter der Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$ und $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$
Table 7-1: Material parameters of the time"=temperatur shift functions $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$ and $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$

Bezeichnung	Parameter	Werte	Einheit
Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{n}}$ (6-90)	C_1^{n}	29.63	[-]
	C_2^{n}	72.5	[K]
	$E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{n}}$	37301.8	[K]
	$\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$	375.15	[K]
Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktion $a_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}}$ (6-91)	C_1^{s}	25.14	[-]
	C_2^{s}	55.6	[K]
	$E_{\mathrm{A}}^{\mathrm{s}}$	23739.65	[K]
	$\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$	363.15	[K]

$$= \hat{E}_\infty + \sum_{k=1}^{M} E_k \frac{i\,\omega}{\frac{1}{\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}}} + i\,\omega} \tag{7-6}$$

$$= \hat{E}_\infty + \sum_{k=1}^{M} E_k \frac{\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}})^2}{1+\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}})^2} + i \sum_{k=1}^{M} E_k \frac{\omega\,\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}}}{1+\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}})^2} \tag{7-7}$$

mit dem Speicher- $\tilde{E}'$ und Verlustmodul $\tilde{E}''$ in Abhängigkeit der Frequenz ω

$$\tilde{E}' = \hat{E}_\infty + \sum_{k=1}^{M} E_k \frac{\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}})^2}{1+\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}})^2} \quad \text{und} \quad \tilde{E}'' = \sum_{k=1}^{M} E_k \frac{\omega\,\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}}}{1+\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}})^2} \tag{7-8}$$

sowie dem Verlustwinkel $\tan\delta = \frac{\tilde{E}''}{\tilde{E}'}$. Analog folgt für den komplexen Schubmodul (7-2)

$$\tilde{G}^*(\omega;\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}},p_{\mathrm{R}}) = \underbrace{\hat{G}_\infty + \sum_{k=1}^{M} G_k \frac{\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{s}})^2}{1+\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{s}})^2}}_{\tilde{G}'} + i \underbrace{\sum_{k=1}^{M} G_k \frac{\omega\,\hat{\tau}_k^{\mathrm{s}}}{1+\omega^2\,(\hat{\tau}_k^{\mathrm{s}})^2}}_{\tilde{G}''} \tag{7-9}$$

mit dem Phasenwinkel $\tan\delta = \frac{\tilde{G}''}{\tilde{G}'}$. Die Relaxationsstärken E_k und G_k, -zeiten $\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}}$ und

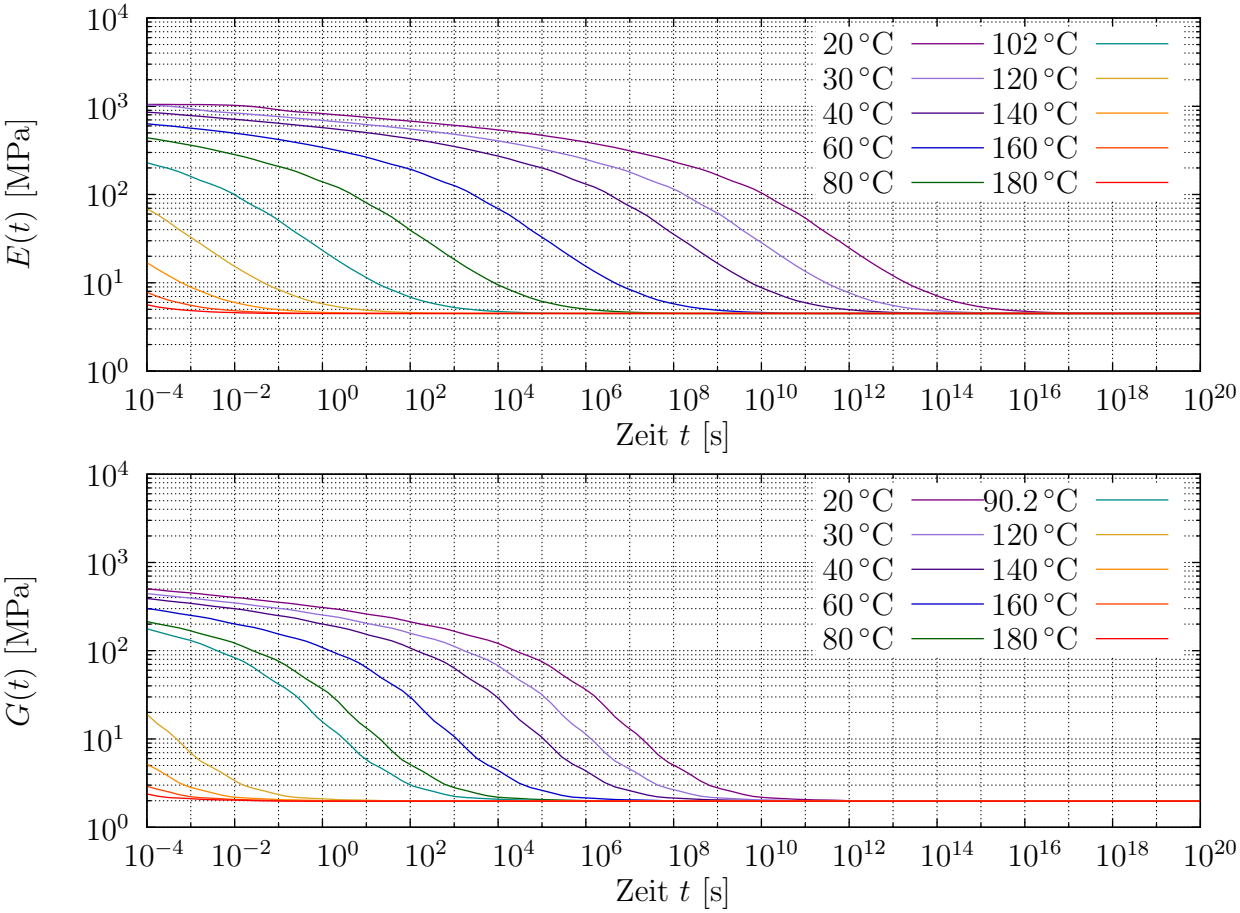


Abbildung 7-3: Schar der Relaxationsfunktionen $\tilde{E}(t)$ und $\tilde{G}(t)$ in Abhängigkeit der Temperatur T mit den Parametern des LWF aus der Dynamisch-mechanischen Analyse

Figure 7-3: Array of relaxation functions $\tilde{E}(t)$ and $\tilde{G}(t)$ as function of temperature T with parameters by LWF of the dynamic mechanical analysis

$\hat{\tau}_k^{\mathrm{s}}$ sowie Gleichgewichtsmodule $\hat{E}_\infty$ und $\hat{G}_\infty$ werden am LWF identifiziert, indem der Speicher- und Verlustmodul des Elastizitäts- (7-8) und Schubmoduls (7-9) jeweils simultan an die Messdaten der beiden Messmethoden in der DMA für die Referenzzustände angepasst werden – siehe 4.2.1. Die Materialparameter $\hat{E}_\infty$, E_k und $\hat{\tau}_k^{\mathrm{n}}$ gelten somit für die Beschreibung der DIRICHLET-PRONY-Reihe (7-3) für den vollständig ausgehärteten Klebstoff unter der Temperatur $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$. Dementsprechend beschreiben die Materialparameter $\hat{G}_\infty$, G_k und $\hat{\tau}_k^{\mathrm{s}}$ die DIRICHLET-PRONY-Reihe (7-4) für $p = p_{\mathrm{R}}$ bei $\theta = \theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$.
Anhand der diskreten Zeit-Temperatur-Verschiebungsfaktoren $a_{\mathrm{T}_l}^{\mathrm{n}}$ und $a_{\mathrm{T}_l}^{\mathrm{s}}$ zu den jeweiligen Temperaturen θ_l^{n} und θ_l^{s}, die bei der Verschiebung der einzelnen Messkurven zu den Masterkurven – wie qualitativ in Abb. 7-1 dargestellt – entstehen, werden die Zeit-Temperatur-Verschiebungsfunktionen (6-90) und (6-91) identifiziert.
Die Materialparameter aus der Anpassung der Funktionen (6-90) und (6-91) an die Datenpunkte sind in Tabelle 7-1 aufgeführt und deren Verläufe sind in Abb. 7-2 zusammen mit den diskreten Datenpunkten aus der Zeit-Temperatur-Verschiebung der Messdaten dargestellt.
Abb. 7-3 zeigt das Ergebnis der identifizierten DIRICHLET-PRONY-Reihen des Elastizitäts- $E(t)$ und Schubmoduls $G(t)$ über Zeit t für verschiedene Temperaturen θ unter der Zeit-Temperaturverschiebung mit den Verschiebungsfunktionen (6-90) und (6-91) und den Materialparametern in Tabelle 7-1.

7.1.2 Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsprinzip
Time-cure shift principle

Am LWF werden DMA-Versuche mit der Methode „shear sandwich“ an teilausgehärteten Klebstoffsubstanzproben durchgeführt – Kapitel 4.2.2. Die Messergebnisse werden mittels Zeit-Temperatur- und Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsprinzip hin zu einer Masterkurve verschoben. Neben den bereits gezeigten Zeit-Temperatur-Verschiebungsfaktoren entstehen aufgrund der Verschiebung der Messkurven der teilgehärteten Proben über der logarithmischen Zeitachse Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfaktoren, die am LWF für die Identifikation der Materialparameter der Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen (6-95) und (6-96) nach [EBM+00] vor dem Gelpunkt verwendet wird. Am IfM werden die Materialparameter des LWF für die ZAV-Funktion vor dem Gelpunkt p_{gel} in einem weiteren Identifikationsschritt an die Fließkurven aus Scherzugversuchen mit teilgehärteten Klebschichten in Kapitel 4.3.1 angepasst, um den Einfluss der Substrate auf die Klebschicht zu berücksichtigen. Abb. 7-4 zeigt die Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktion des LWF und IfM vor (grün) und nach dem Gelpunkt (blau).

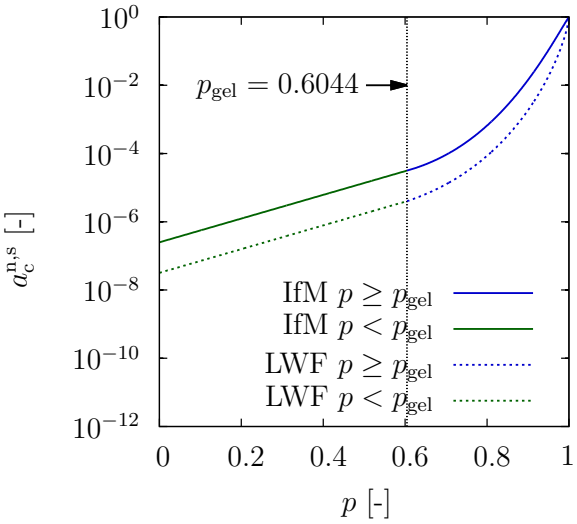


Abbildung 7-4: Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen mit Materialparametern des LWF und IfM über dem Aushärtegrad p
Figure 7-4: Time-cure shift functions with parameters by LWF and IfM over degree of cure p

In den Abb. 7-5 sind die Scharen der DIRICHLET-PRONY-Reihen des Elastizitäts- $E(t)$ und Schubmoduls $G(t)$ über Zeit t für verschiedene Aushärtegrade p dargestellt.

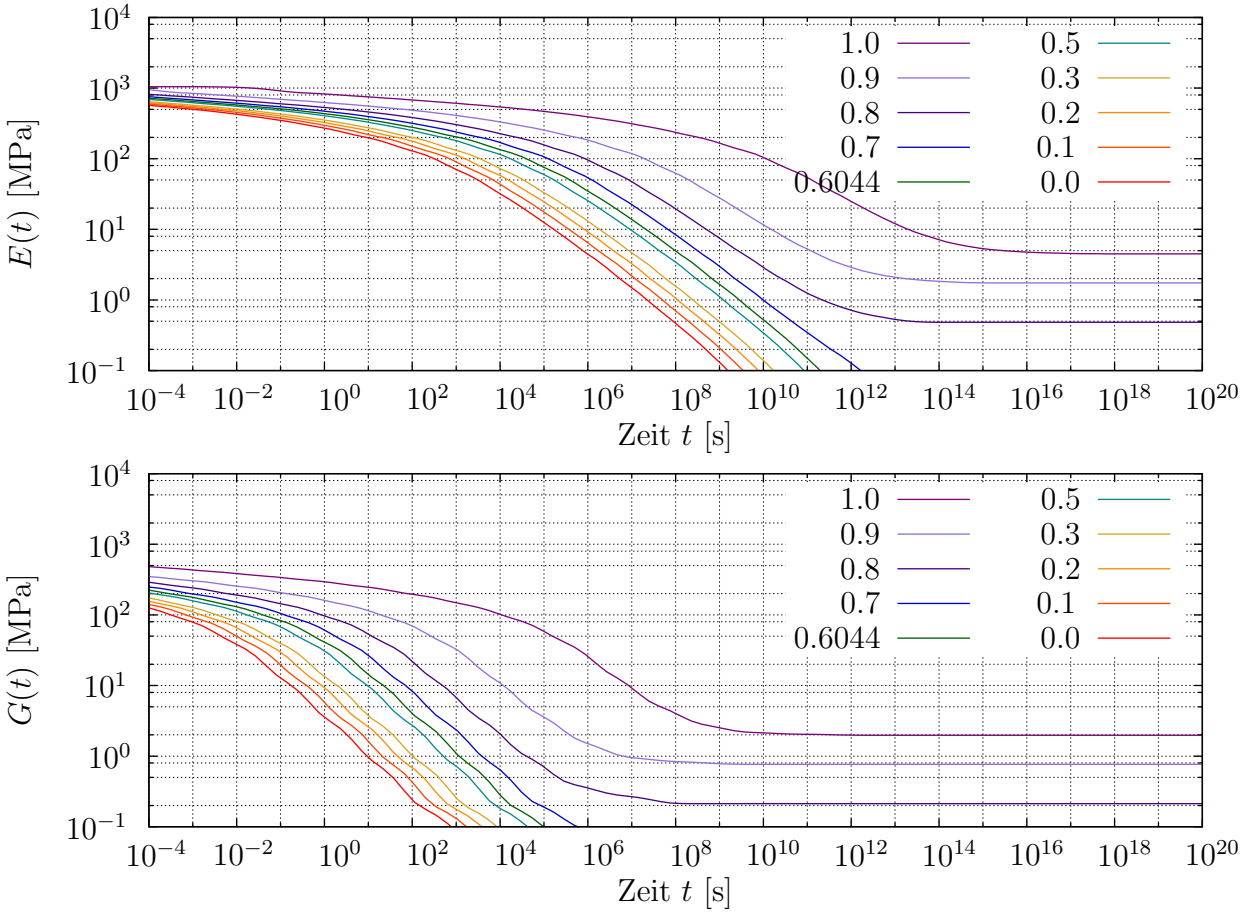


Abbildung 7-5: Schar der Relaxationsfunktionen $E(t)$ und $G(t)$ in Abhängigkeit des Aushärtegrads p mit den Parametern des LWF aus der Dynamisch-mechanischen Analyse
Figure 7-5: Array of relaxation functions $E(t)$ and $G(t)$ as functions of degree of cure p with parameters by LWF of the dynamical mechanical analysis

7.1.3 Steifigkeiten der Relaxationsfunktionen des Kohäsivzonenmodells
Stiffnesses of the relaxation functions of the cohesive zone model

Die identifizierten Relaxationsstärken und -zeiten aus der DMA des LWF werden im Folgenden für die Simulation des thermo- und chemo-viskoelastischen Klebschichtverhaltens für die Verwendung des Grenzflächenmodells modifiziert und verwendet. Dafür werden der zeitabhängige Elastizitäts- $\tilde{E}(t)$ und Schubmodul $\tilde{G}(t)$ jeweils in die Relaxationsmodule der Referenzzustände (6-109) und (6-109) mithilfe der Näherungen

$$\tilde{R}_{\mathrm{n}}(t) \approx \frac{\tilde{E}(t)}{d_{\mathrm{k}}} \quad \text{und} \quad \tilde{R}_{\mathrm{s}}(t) \approx \frac{\tilde{G}(t)}{d_{\mathrm{k}}} \tag{7-10}$$

Tabelle 7-2: Materialparameter der Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen a_c^n und a_c^s
Table 7-2: Material parameters of time-cure shift functions a_c^n und a_c^s

Bezeichnung	Parameter	Werte	Einheit
a_c^n (6-95) und a_c^s (6-96) Materialparameter LWF	$a_\mathrm{gel}^{\mathrm{n,s}}$	12.4271	[-]
	$a_1^{\mathrm{n,s}}$	3.062	[-]
	$a_2^{\mathrm{n,s}}$	0.7352	[-]
	$a_3^{\mathrm{n,s}}$	8.0	[-]
a_c^n (6-95) und a_c^s (6-96) Materialparameter IfM	$a_\mathrm{gel}^{\mathrm{n,s}}$	10.3668	[-]
	$a_1^{\mathrm{n,s}}$	7.005	[-]
	$a_2^{\mathrm{n,s}}$	1.066	[-]
	$a_3^{\mathrm{n,s}}$	8.0	[-]

und der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Klebschichtdicke d_k umgerechnet. Für die Umrechnung folgt nach Einsetzen von Gl. (7-3) und Gl. (6-109) in die Gl. (7-10)$_1$

$$k\left[\hat{v}_\infty^\mathrm{n}+\sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{n}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{n}}\right)\right] \approx \frac{1}{d_\mathrm{k}}\left[\hat{E}_\infty+\sum_{i=1}^{M} E_i\exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{n}}\right)\right] \tag{7-11}$$

$$= \frac{E_0}{d_\mathrm{k}}\left[\hat{v}_\infty^\mathrm{n}+\sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{n}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{n}}\right)\right] \tag{7-12}$$

$$\Leftrightarrow \quad k \approx \frac{E_0}{d_\mathrm{k}} \tag{7-13}$$

mit dem instantanen Elastizitätsmodul $E_0=\hat{E}_\infty+\sum_{i=1}^{M} E_i$ sowie den Beteiligungsfaktoren $\hat{v}_\infty^\mathrm{n}=\hat{E}_\infty/E_0$ und $v_i^\mathrm{n}=E_i/E_0$ unter der Voraussetzung gleicher Beteiligungsfaktoren für das Steifigkeits- und Modulverhältnis. Analog gilt für den Schub nach Einsetzen von Gl. (7-4) und Gl. (6-110) in Gl. (7-10)$_2$

$$g\left[\hat{v}_\infty^\mathrm{s}+\sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{s}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{s}}\right)\right] \approx \frac{G_0}{d_\mathrm{k}}\left[\hat{v}_\infty^\mathrm{s}+\sum_{i=1}^{M} v_i^\mathrm{s}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_i^\mathrm{s}}\right)\right] \tag{7-14}$$

$$\Leftrightarrow \quad g \approx \frac{G_0}{d_\mathrm{k}} \tag{7-15}$$

mit dem instantanen Schubmodul $G_0=\hat{G}_\infty+\sum_{i=1}^{M} G_i$ sowie den Beteiligungsfaktoren $\hat{v}_\infty^\mathrm{s}=\hat{G}_\infty/G_0$ und $v_i^\mathrm{s}=G_i/G_0$. Das viskoelastische Spektrum $\{g_i,\,\hat{\tau}_i^\mathrm{s};\,i=1,\cdots,M\}$ mit $\hat{g}_\infty$ für das Kohäsivzonenmodell wird in Kapitel A.3 anhand von Stufenversuchen an der Scherzugprobe mit ausgehärteter Klebschicht bei Raumtemperatur verifiziert.

7.1.4 Anpassung der instantanen Steifigkeiten g und k an Warmfließkurven
Adaption of the instantaneous stiffnesses g and k to flow curves at certain temperatures

Im Anschluss an die Umrechnung der Module aus der DMA in die Steifigkeiten für das Kohäsivzonenmodell mit den Gln. (7-13) und (7-15) werden diese in einem weiteren Identifikationsschritt an die Messdaten der Warmfließkurven aus Scher- und Kopfzugversuchen vor dem Fließbeginn angepasst. Hier muss berücksichtigt werden, dass die Module in der DMA an Klebstoffsubstanzproben ermittelt werden, die je nach der Mess-

methode „dual cantilever bending“ und „shear sandwich“ lediglich verklemmt werden. Die Scher- und Kopfzugprobe sind Verbundproben, deren Substrate aus Stahl mithilfe der Klebschicht verbunden sind. Die Stahlsubstrate üben aufgrund ihrer deutlich höheren Steifigkeit einen Zwang auf die Klebschicht aus, der bei dünnen Klebschichtdicken aufgrund der Querdehnungsbehinderung zu einer Erhöhung der Steifigkeit der Klebschicht führt. Daher werden die instantanen Steifigkeiten k und g in den Relaxationsfunktionen des Referenzzustands (6-109) und (6-110) jeweils an die Messdaten aus den Scher- und Kopfzugversuchen angepasst.
Dafür werden FE-Berechnungen mit den FE-Modellen der Scher- und Kopfzugprobe unter den Randbedingungen des LWF aus den Versuchen für die Warmfließkurven in [P8714] durchgeführt, um die Steifigkeiten k und g an den elastischen Bereich der Messdaten anzupassen. In den quasistatisch zügigen Versuchen und FE-Berechnungen sind die Gleitraten der Scherzugversuche und die Dehnraten der Kopfzugversuche jeweils $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$. Die Beschreibung der FE-Modelle kann dem Abschlussbericht zum FOSTA-Projekt P 958 [P9515b, S. 89 ff.] entnommen werden. Im Zuge der Anpassung an die Warmfließkurven werden im FE-Modell die Temperaturen $T = 22\,$℃, $40\,$℃, $60\,$℃ und $80\,$℃[3] als konstante Temperaturrandbedingungen für alle Knoten des FE-Modells unter Annahme einer näherungsweise homogenen Temperaturverteilung in den Proben vorgegeben.

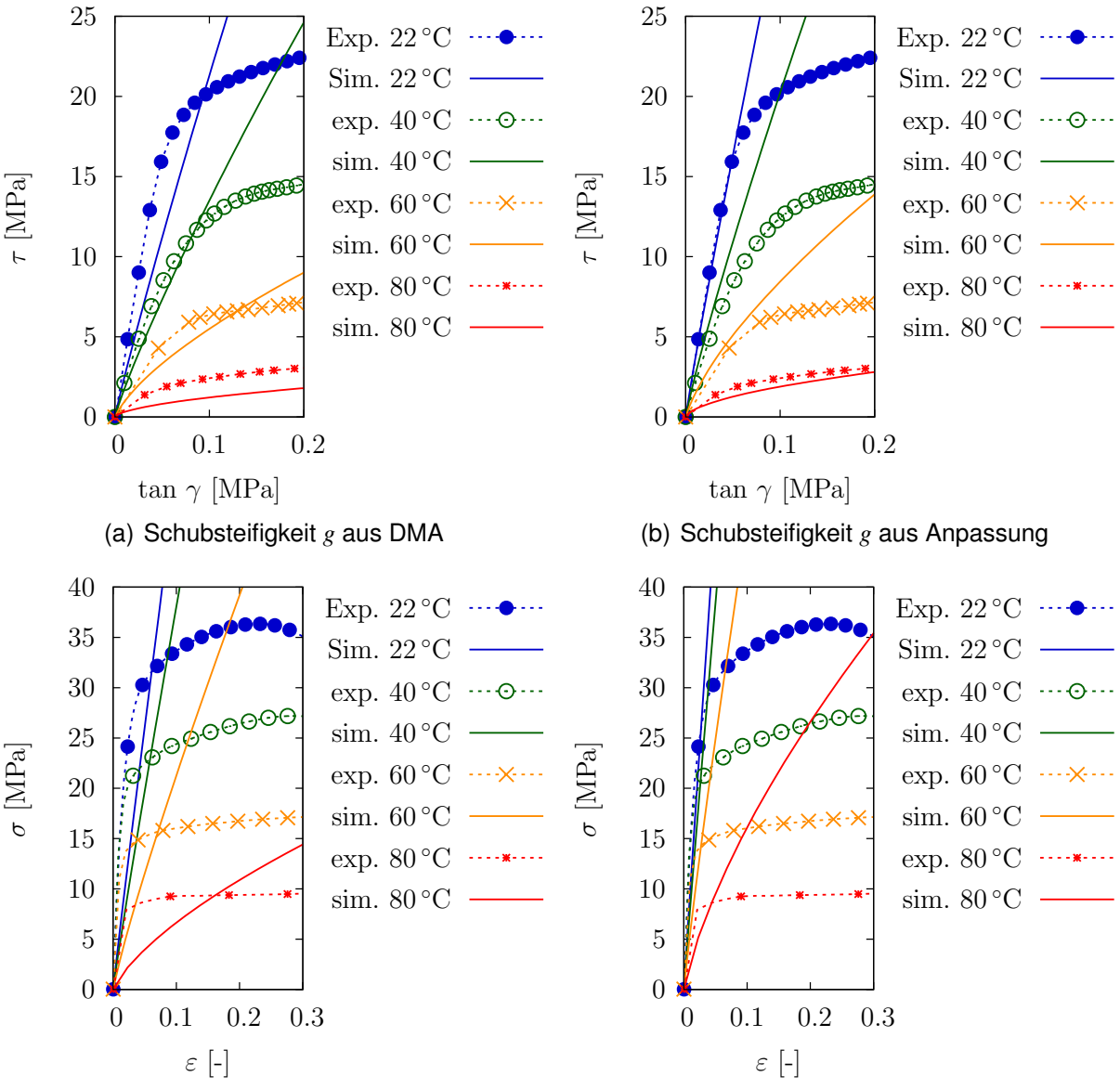
7.1.5 Anpassung der ZAV-Funktionen an Fließkurven teilgehärteter Proben
Adaption of the TCS function to flow curves of partially cured specimens

Die Materialparameter für die Zeit-Aushärtegradverschiebungsfunktionen des LWF werden an die Steigung des elastischen Bereichs vor Erreichen des Fließbeginns der Scher- und Kopfzugversuche mit teilgehärteten Klebschichten angepasst. Das Ergebnis der Anpassung ist in den Abbn. 7-7 dargestellt. In den Abb. 7-7(a) und 7-7(c) sind die Simulationsergebnisse der viskoelastischen Steifigkeiten mit den Materialparametern der Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktion des LWF aus Tabelle 7-2 zusammen mit den Messergebnissen der Scher- und Kopfzugversuche dargestellt. Bei Betrachtung der Ergebnisse an der Scherzugprobe ist eine relativ deutliche Abweichung zwischen den Daten der FE-Simulation und den Messdaten der Versuche zu erkennen. Nach Anpassung der Materialparameter $a_{\mathrm{gel}}^{\mathrm{n,s}}$, $a_1^{\mathrm{n,s}}$ und $a_2^{\mathrm{n,s}}$ der Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen (6-95) und (6-96) wird die elastische Steifigkeit des Versuchs deutlich besser getroffen – s. Abbn. 7-7(b) und 7-7(d). An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass für den Kopfzugversuch dieselben Materialparameter verwendet werden wie für den Scherzugversuch, da die Zeit-Aushärtegradverschiebung mittels DMA lediglich mit der Messmethode „shear sandwich“ untersucht worden ist. Demnach gelten die Materialparameter für die Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktion des Schubrelaxationsmoduls $G(t)$. An dieser Stelle können daher keine näheren Angaben zur Güte der Anpassung an die Kopfzugversuche mit teilgehärteten Klebschichten in Abb. 7-7(d) gemacht werden.

[3] Hinweis: Die CELSIUS-Temperatur T berechnet sich aus der absoluten Temperatur θ mit $T = \theta - 273.15$ und hat die Einheit [℃]

7.1.6 Ergebnis der Anpassungen
Result of adaptions

Die DMA bietet die Möglichkeit, die Materialparameter des viskoelastischen Modellteils mit relativ geringen Aufwand zu identifizieren. Da die DMA an Substanzproben durchgeführt wird, müssen die instantanen Steifigkeiten k und g des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells in einem weiteren Schritt an die Messdaten aus Scher- und Kopfzugproben angepasst werden. In den Abbn. 7-6 sind die Verläufe der FE-Rechnung zusammen mit den Messdaten des LWF der Scher- und Kopfzugversuche für die Temperaturen $T = 22\,℃$, $40\,℃$, $60\,℃$ und $80\,℃$ dargestellt. Abb. 7-6(a) zeigt den Verlauf des elasti-



(a) Schubsteifigkeit g aus DMA

(b) Schubsteifigkeit g aus Anpassung

(c) Normalsteifigkeit k aus DMA

(d) Normalsteifigkeit k aus Anpassung

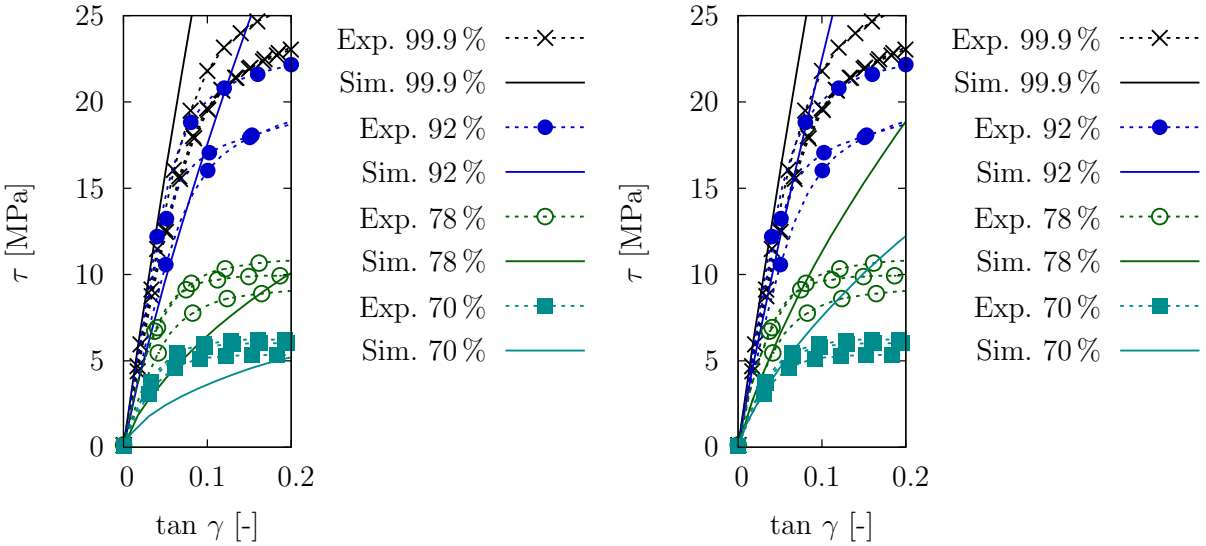
Abbildung 7-6: Anpassung der instantanen Steifigkeiten k und g des LWF aus der DMA an die Warmfließkurvenschar der quasistatisch zügigen Scher- und Kopfzugversuche unter der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

Figure 7-6: Adaption of instantaneous stiffnesses k and g by LWF of DMA to flow curves of quasi static shear and tensile tests for certain temperatures as well as shearing and tensile rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

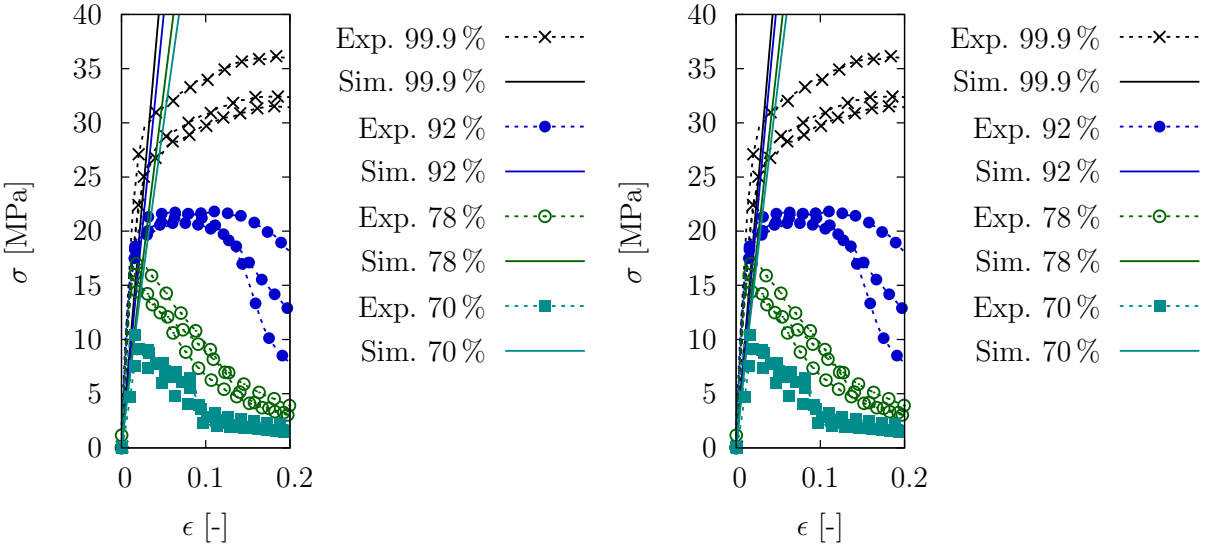
schen Bereichs vor und Abb. 7-6(b) nach der Anpassung der instantanen Schubsteifigkeit g für den Scherzugversuch. Mit relativ geringen Aufwand kann die Schubsteifigkeit g so angepasst werden, dass das Simulationsergebnis sehr gut mit dem Messergebnissen korreliert.

Das Ergebnis der FE-Rechnung des Kopfzugversuchs mit der Steifigkeit aus der DMA ist in Abb. 7-6(c) dargestellt und Abb. 7-6(d) zeigt das Ergebnis der Anpassung der instantanen Normalsteifigkeit k an die Warmfließkurvenschar. Auch hier ist eine deutliche Verbesserung bzgl. der Korrelation zwischen FE-Simulation und Versuch zu erkennen.

Die DIRICHLET-PRONY-Parameter des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells sind in



(a) Scherzugversuch mit ZAV-Parametern LWF (b) Scherzugversuch mit ZAV-Parametern IfM



(c) Kopfzugversuch mit ZAV-Parametern LWF (d) Kopfzugversuch mit ZAV-Parametern IfM

Abbildung 7-7: Anpassung der Materialparameter der Zeit-Aushärtegrad-Verschiebungsfunktionen des LWF aus der DMA an die Fließkurvenschar der quasistatisch zügigen Scher- und Kopfzugversuche mit teilgehärteten Klebschichten unter der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ – s. Tabelle 7-2

Figure 7-7: Adaption of instantaneous stiffnesses k and g by LWF of DMA to flow curves of quasi static shear and tensile tests for partially cured adhesives as well as shearing and tensile rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

den Tabellen A-1 und A-2 aufgeführt. Sie enthalten jeweils die Beteiligungsfaktoren $v_i^{\mathrm{n,s}}$, Relaxationsstärken k_i, g_i und -zeiten $\hat{\tau}_i^{\mathrm{n,s}}$ sowie die instantanen Steifigkeiten k, g und die Anteile der Gleichgewichtssteifigkeiten $v_\infty^{\mathrm{n,s}}$ für die Normal- und beiden Schubbeanspruchungen.

7.2 Identifikation ausgehärteter Klebschichten bei Raumtemperatur Identification of cured adhesives at ambient temperature

7.2.1 Doppelrohrprobe Double tube specimen

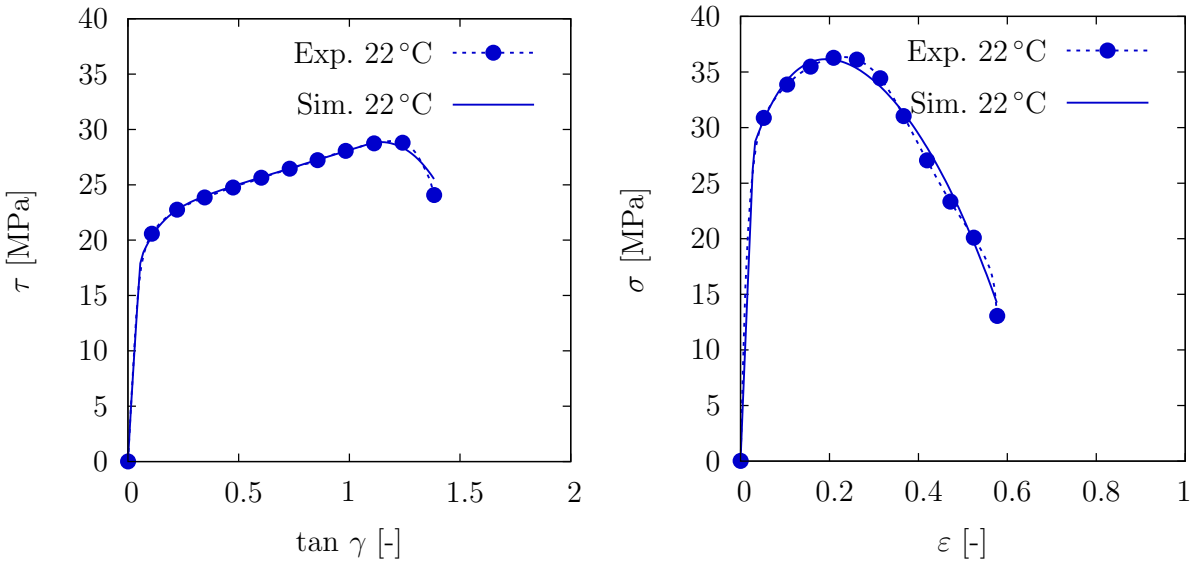
Die Materialparameter der Fließfunktion (6-133) $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, des plastischen Potentials (6-134) $\tilde{a}_2^*$, der nichtlinearen isotropen Verfestigung (6-133) q, b und H, der Schädigung (6-157) n_{D}, des kritischen Verschiebungssprungs (6-160) und (6-161) Bruchverschiebungssprungs[4] d_1, d_2, d_3, d_{I1}, d_{I2} und die Anfangsfließspannung τ_0 in der Fließspannung (6-140) werden in [P9515a, S. 188 ff.] durch Anpassung des TAPO-Kohäsivzonenmodells[5] an Messdaten aus Versuchen an der Doppelrohrprobe des LWF identifiziert. Dafür werden die Messdaten aus Versuchen unter Torsions[6]- $\alpha_{\mathrm{exp}} = \infty$, Zug- $\alpha_{\mathrm{exp}} = 0$ und kombinierter Torsions-Zug-Belastung unter zwei verschiedenen Belastungsverhältnissen $\alpha_{\mathrm{exp}} = 2$ und $\alpha_{\mathrm{exp}} = 0.5$ verwendet. Für die Anpassung der Materialparameter wird in [P9515a] ein FE-Modell der Doppelrohrprobe erstellt, um die Versuche unter Vorgabe der gemessenen Verdrehungen und Verschiebungen als Randbedingung mit den jeweils konstanten Belastungsverhältnissen α_{exp} zu simulieren. Dabei werden die Materialparameter des TAPO-Kohäsivzonenmodells mithilfe des Optimierungsprogamms LS-OPT bestmöglich an die Messkurven aller Doppelrohrprobenversuche angepasst – s. [P9515a, S. 192, Abbn. 7-17 und 7-18].
Die Materialparameter in Tabelle 7-3 aus der Optimierung in [P9515a] werden als Startparameter[7] für die folgende Identifikation an den Messdaten aus Scher- und Kopfzugversuchen verwendet. Im Rahmen des vorliegenden Projekts und des FOSTA-Projekts P 878 [P8714] werden die Einflüsse der Temperatur θ und des Aushärtegrads p jeweils mit den Kurvenscharen aus Scher- und Kopfzugversuchen untersucht. Dafür wird angenommen, dass die Spannungszustände in den Klebschichten der Scher- und Kopfzugprobe näherungsweise homogen sind und diese daher als Grundproben verwendet werden können.
In [P9515a] wird das TAPO-Kohäsivzonenmodell an den Messdaten aus Scher- und Kopfzugversuchen mit der Klebschichtdicke $d_{\mathrm{k}} = 0.3$ und den Materialparametern aus der Identifikation an den Messdaten der Doppelrohrprobenversuche validiert. Die Validierung zeigt, dass die FE-Simulation der Kopfzugprobe [P9515a, S. 195, Abb. 7-20] mit dem TAPO-Kohäsivzonenmodell und den Materialparametern in [P9515a, S. 191,

[4] Hinweis: Ohne Ratenabhängigkeit für $d_4 = 0.0$.
[5] Hinweis: Im Abschlussbericht [P9515a] des FOSTA-Projekts P 957 wird das TAPO-Kohäsivzonenmodell als Reduziertes TAPO-Modell bezeichnet.
[6] Verhältnis zwischen Gleitung γ und Dehnung ε im Versuch: $\alpha_{\mathrm{exp}} = \frac{|\gamma|}{2\varepsilon}$, s. [BBB+13, S. 272, Gl. (123)]
[7] Hinweis: Die Werte für b und H müssen auf die Klebschichtdicke $d_{\mathrm{k}} = 0.3$ mm bezogen werden, da in der vorliegenden Arbeit nicht das Dehnungsmaß für die Grenzschicht [Bur15, S. 103, Gl. (7.85)] verwendet wird.

Tabelle 7-3: Materialparameter des TAPO-Kohäsivzonenmodells aus der Anpassung an die Messdaten aus Versuchen an der Doppelrohrprobe für ein und mehrachsige Beanspruchungen aus [P9515a, S. 191, Tab. 7-4]
Table 7-3: Material parameters of the TAPO cohesive zone model of the adaption to measurment data of double tube tests for single and multi axial loadings in [P9515a, S. 191, Tab. 7-4]

Beschreibung	Parameter	Wert	Einheit
Fließfunktion (6-133)	$\tilde{a}_1$	0.4457	[-]
	$\tilde{a}_2$	0.2178	[-]
plastisches Potential (6-134)	$\tilde{a}_2^*$	0.3383	[-]
Verfestigung (6-145)	q	2.746	[MPa]
	b	83.16	$\left[\mathrm{mm}^{-1}\right]$
	H	44.5	$\left[\frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{mm}}\right]$
Anfangsfließspannung in Gl. (6-140)	τ_0	18.5	[MPa]
Schädigung (6-157)	n_D	2.0	[-]
kritischer Verschiebungssprung (6-160)	$d_{\mathrm{I}1}$	0.000279	[mm]
und	$d_{\mathrm{I}2}$	0.3132	[mm]
Bruchverschiebungssprung (6-161)	d_1	0.10347	[mm]
	d_2	0.3282	[mm]
	d_3	6.935	[-]

Tab. 7-4] die Messdaten der Kopfzugversuche hinreichend gut abbildet – s. [P9515a, S. 195 f. und Abb. 7-21]. Im Gegensatz dazu zeigt die FE-Simulation der Scherzugprobe [P9515a, S. 197, Abb. 7-22] erhebliche Abweichungen zwischen den Mess- und Simulationsdaten im Schubspannungs-Verschiebungsdiagramm in [P9515a, S. 198, Abb. 7-23]. In [P9515a, S. 197] wird berichtet, dass die identifizierte Schubfließgrenze τ_0 und die Steigung H der nichtlinearen isotrope Verfestigung R des TAPO-Kohäsivzonenmodells die Messdaten der Scherzugversuche mit der Klebschichtdicke $d_\mathrm{k} = 0.3\,\mathrm{mm}$ deutlich überschätzen. Ein Vergleich der FE-Berechnungen der Doppelrohrprobe unter Torsionsbelastung und der Scherzugprobe zeigt, dass die ausgewerteten Schubspannungs-Verschiebungsverläufe nur geringfügige Abweichungen zeigen – s [P9515a, S. 199, Abb. 7-24]. Da zwischen den Messergebnissen der Doppelrohrprobe unter Torsion und der Scherzugprobe jedoch größere Abweichungen vorliegen und die Materialparameter des TAPO-Kohäsivzonenmodells an den Doppelrohrproben identifiziert werden, ist die Abweichung zwischen der FE-Rechnung und den Messdaten der Scherzugversuche folgerichtig. Diese Problematik wird bereits in [P8714, S. 221 ff.] im Rahmen der Verifikation des temperaturabhängigen TAPO-Kohäsivzonenmodells thematisiert. In [P8714] werden ebenfalls die Materialparameter der Fließfunktion aus [P9515a] verwendet, die an den Messdaten der Doppelrohrproben identifiziert worden sind. Die Materialparameter werden jedoch nicht durch eine weitere Optimierung an die Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche bei Raumtemperatur [P8714, S. 67, Abb. 4.65 und S. 70, Abb. 4.68] angepasst, sodass im Ergebnis die Scherzugversuche gut und die Kopfzugversuche befriedigend abgebildet werden – s. [P8714, S. 220, Abb. 6.22 und S. 222, Abb. 6.24 bzw. S. 223, Abb. 6.25].



(a) Scherzugversuch (b) Kopfzugversuch

Abbildung 7-8: Ergebnis der Optimierung an den Messdaten der quasistatisch zügigen Scher- und Kopfzugversuche aus [P8714] mit ausgehärteter Klebschicht bei Raumtemperatur $T_0 = 22$ ℃ bzw. $\theta_0 = 295.15\,\mathrm{K}$ unter der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$
Figure 7-8: Result of the optimisation to the measurement data of quasi static shear and tensile tests in [P8714] with cured adhesive at ambient temperature $T_0 = 22$ ℃ respectively $\theta_0 = 295.15\,\mathrm{K}$ and shear and strain rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

7.2.2 Scher- und Kopfzugprobe
Thick adherend shear and butt joint specimen

Aufgrund der Diskrepanz zwischen den Messdaten der Scherzug- und Doppelrohrprobenversuche unter Torsion bzgl. des Fließbeginns und der Verfestigung werden die Materialparameter des Konstitutivmodells an die Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche bei Raumtemperatur angepasst. Im Zuge des zweiten Identifikationsschritts werden die Materialparameter des isothermen TAPO-Kohäsivzonenmodells aus Tabelle 7-3 daher an den Scher- und Kopfzugversuchen mit ausgehärteten Klebschichten bei Raumtemperatur $\theta = \theta_0$ angepasst. Mit der Scher- und Kopfzugprobe stehen lediglich zwei verschiedene Beanspruchungen in der Klebschicht für die Identifikation zur Verfügung, die jeweils einen Punkt auf der Fließortkurve (6-133) beschreiben – den Schnittpunkt mit der Ordinate $\hat{\tau}$ bzw. Abszisse $\hat{t}_\mathrm{n}$ im $\hat{\tau} - \hat{t}_\mathrm{n}$-Spannungsraum. Für eine eindeutige Identifikation der Materialparameter der Fließellipse $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ und τ_0 fehlt somit eine Belastungskombination zwischen der Schub- und Normalbeanspruchung in der Grenzfläche. Die beiden Materialparameter $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ haben Auswirkung auf die Halbachsen und den Mittelpunkt der Fließellipse im $\hat{\tau} - \hat{t}_\mathrm{n}$ Spannungsraum – vgl. [BBB$^+$13, S. 283, Abbn. 261]. Bei der folgenden Identifikation wird daher lediglich der Materialparameter $\tilde{a}_2$ neu identifiziert und $\tilde{a}_1$ bleibt auf dem Wert aus [P9515a].

Die Materialparameter $\tilde{a}_2$, n_D und d_3 bleiben von der Optimierung an den Messdaten der Scher- und Kopfzugprobe ebenfalls unberührt. Der Schädigungsparameter n_D wird unter Annahme eines quadratischen Verlaufs der Schädigungsvariable über der internen Variable (6-155) mit $n_\mathrm{D} = 2$ festgelegt – s. a. [P8714, S. 216 bzw. S. 218, Tab. 6.3] und vgl. [BBB$^+$13, S. 276 f., Tabn. 21, 22 und 23]. Der Materialparameter $\tilde{a}_2^*$ und d_3 steuern jeweils den Einfluss mehrachsiger Beanspruchungen auf das Materialverhalten

und werden daher auf den Werten aus der Identifikation mit den mehrachsigen Beanspruchungszuständen an der Doppelrohrprobe belassen.
In einem ersten Optimierungsschritt werden die übrigen Materialparameter in Tabelle 7-3 mithilfe des Optimierungsprogamms LS-OPT simultan an die Messdaten des Scher- und Kopfzugversuchs mit ausgehärteten Klebschichten bei Raumtemperatur $\theta = \theta_0$ aus [P8714] angepasst. Das Ergebnis der Anpassung ist in der Abb. 7-8 im Spannungs-Dehnung- bzw. Schubspannungs-Gleitungsdiagramm dargestellt und die Materialparameter der Optimierung sind in Tabelle 7-4 aufgeführt. Das Simulationsergebnis korreliert augenscheinlich sehr gut mit den Messdaten des Scher- und Kopfzugversuchs.
Ausgehend von den Materialparametern in Tabelle 7-4 werden im folgenden weitere Optimierungen an der Warmfließkurvenschar der Scher- und Kopfzugprobe durchgeführt.

Tabelle 7-4: Materialparameter des reduzierten TAPO-Modells nach der Anpassung an die Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche mit ausgehärteten Klebschichten bei Raumtemperatur
Table 7-4: Material parameters of reduced TAPO model after adaption to measurement data of tests with thick adherend shear and butt joint specimen and cured adhesives at ambient temperature

Beschreibung	Parameter	Wert	Einheit
Fließfunktion (6-133)	$\tilde{a}_1$	0.4457	[-]
	$\tilde{a}_2$	0.1249	[-]
plastisches Potential (6-134)	$\tilde{a}_2^*$	0.3383	[-]
Verfestigung (6-145)	q	3.815	[MPa]
	b	45.68	$\left[\text{mm}^{-1}\right]$
	H	21.35	$\left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}\right]$
Anfangsfließspannung in Gl. (6-140)	τ_0	18.67	[MPa]
Schädigung (6-157)	n_D	2.0	[-]
kritischer Verschiebungssprung (6-160)	$d_{\text{I}1}$	0.000279	[mm]
und	$d_{\text{I}2}$	0.3304	[mm]
Bruchverschiebungssprung (6-161)	d_1	0.2065	[mm]
	d_2	0.3314	[mm]
	d_3	6.935	[-]

7.3 Warmfließkurven aus Scher- und Kopfzugversuchen
Flow curves of shear and tensile tests for certain temperatures

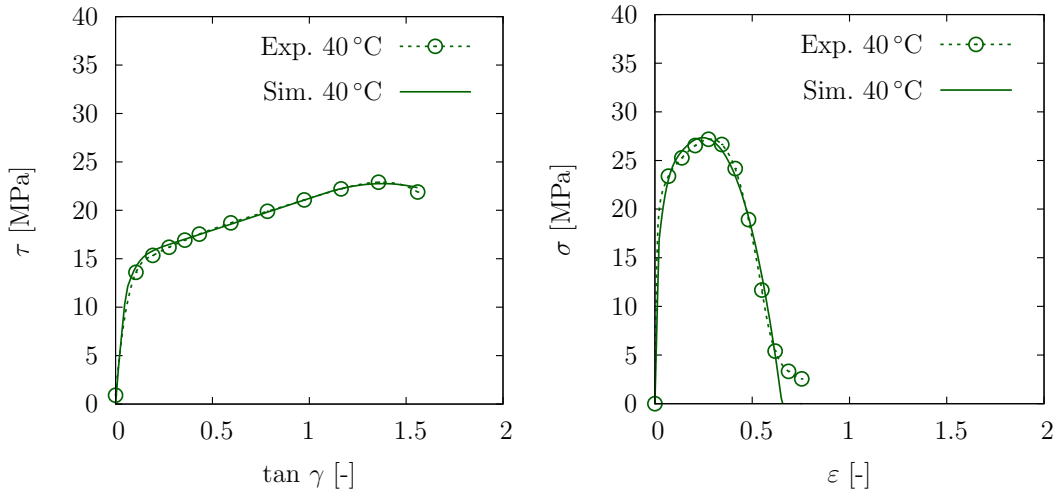
Auf Basis der zuvor identifizierten Materialparameter bei Raumtemperatur $\theta = \theta_0$ in Tabelle 7-4 wird die Modellantwort des TAPO-Kohäsivzonenmodells jeweils für die Temperaturen $T = 40$ °C, 60 °C und 80 °C simultan an die Warmfließkurvenschar der Scher- und Kopfzugversuche in [P8714] angepasst – vgl. [P8714, S. 215]. Im Zuge dieses weiteren Identifikationsschritts werden die Materialparameter $\tilde{a}_2$, q, b, H, τ_0, d_{I1} , d_{I2}, d_1 und d_2 mithilfe von LS-OPT bestmöglich an die Messdaten angepasst. Für die Temperaturen $T = 40$ °C, 60 °C und 80 °C wird auf diese Weise ein Satz Materialparameter identifiziert, der Aufschluss über die Temperaturabhängigkeit der jeweiligen Ansätze im Konstitutivmodell gibt – s. Kapitel 6.6.3 und 6.6.4. Dafür wird jeder Materialparameter in ein Diagramm über der Temperatur aufgetragen, um so die Änderung des Werts über der Temperatur θ deutlich zu machen. Diese dienen der Entwicklung geeigneter Temperaturfunktionen für das Materialmodell, die in Kapitel 6.6 bereits präsentiert und erläutert worden sind.

Die Ergebnisse der Optimierung an den Warmfließkurven der Scher- und Kopfzugversuche sind für die Temperaturen $T = 40$ °C, 60 °C und 80 °C in den Abb. 7-9 jeweils einzeln dargestellt. Das Ergebnis zeigt, dass die Anpassung des TAPO-Kohäsivzonenmodells in Verbindung mit dem thermo-viskoelastischen Modell in Tabelle 7-1 jeweils gut mit den Messdaten der Warmfließkurvenscharen aus Scher- und Kopfzugversuchen korreliert.

Tabelle 7-5: Materialparameter des reduzierten TAPO-Modells nach der Anpassung an die Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche mit ausgehärteten Klebschichten bei verschiedenen Temperaturen
Table 7-5: Material parameters of reduced TAPO model after adaption to measurement data of tests with thick adherend shear and butt joint specimen and cured adhesives at different temperatures

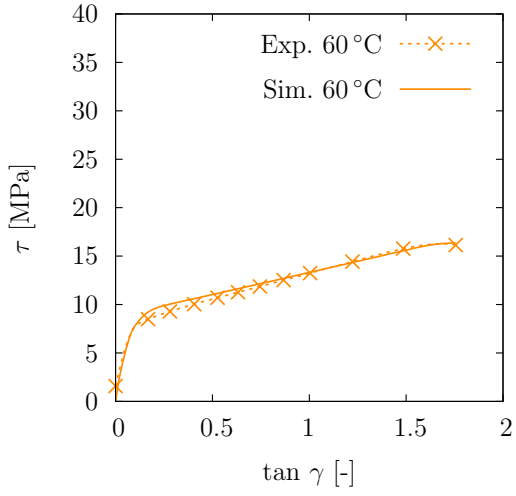
Beschreibung	Parameter	Werte			Einheit
		40 °C	60 °C	80 °C	
Fließfunktion (6-133)	$\tilde{a}_1$	0.4457	0.4457	0.4457	[-]
	$\tilde{a}_2$	0.1598	0.175	0.2025	[-]
plastisches Potential (6-134)	$\tilde{a}_2^*$	0.3383	0.3383	0.3383	[-]
Verfestigung (6-145)	q	3.55	2.075	1.91	[MPa]
	b	113.4	178.8	179.69	$\left[\mathrm{mm}^{-1}\right]$
	H	24.25	21.9	20.08	$\left[\frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{mm}}\right]$
Anfangsfließspannung in Gl. (6-140)	τ_0	11.72	7.35	3.12	[MPa]
Schädigung (6-157)	n_{D}	2.0	2.0	2.0	[-]
kritischer Verschiebungssprung (6-160) und Bruchverschiebungssprung (6-161)	d_{I1}	0.0505	0.0441	1.3e-9	[mm]
	d_{I2}	0.2776	0.4308	0.5029	[mm]
	d_1	0.1971	0.2649	0.3088	[mm]
	d_2	0.5735	0.5797	0.5218	[mm]
	d_3	6.935	6.935	6.935	[-]

Die jeweiligen Werte der Materialparameter aus den Anpassungen bei den Temperaturen $T = 40\,$℃, $60\,$℃ und $80\,$℃ sind in Tabelle 7-5 aufgeführt.

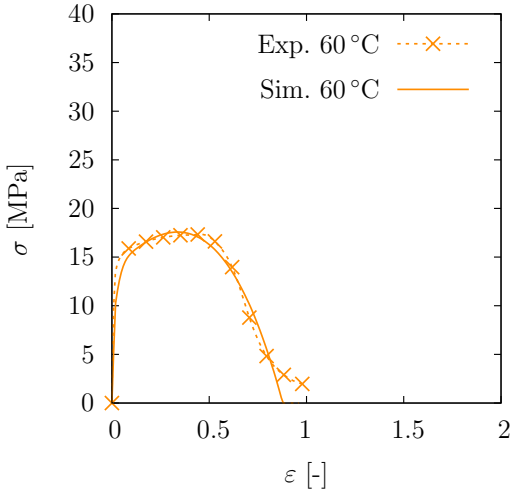


(a) Scherzugversuch 40 °C

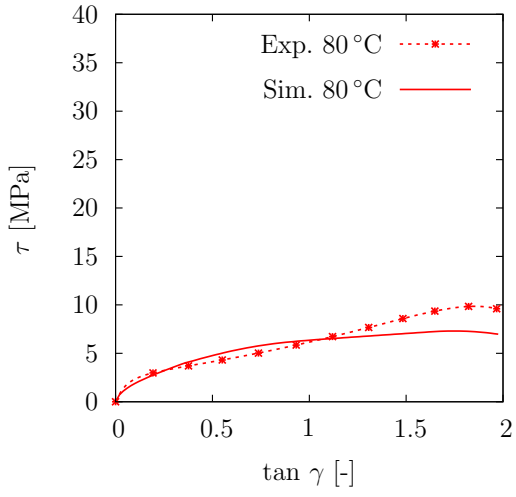
(b) Kopfzugversuch 40 °C



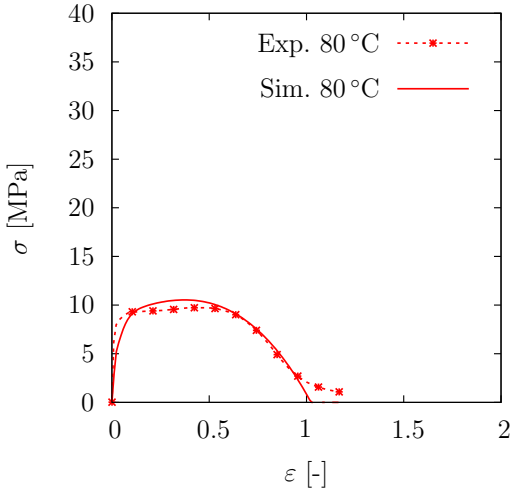
(c) Scherzugversuch 60 °C



(d) Kopfzugversuch 60 °C



(e) Scherzugversuch 80 °C



(f) Kopfzugversuch 80 °C

Abbildung 7-9: Ergebnis der Optimierung an den Messdaten der Warmfließkurvenschar quasi-statisch zügiger Scher- und Kopfzugversuche aus Bericht [P8714] mit ausgehärteter Klebschicht für die Temperaturen $T = 40$ °C, 60 °C und 80 °C unter der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

Figure 7-9: Result of the optimisation to the measurement data of quasi static shear and tensile tests in [P8714] with cured adhesive at differents temperatures $T = 40$ °C, 60 °C und 80 °C under shear and strain rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

7.4 Fließkurven teilausgehärteter Klebschichten aus Scher- und Kopfzugversuchen
Flow curves of shear and tensile tests with partially cured adhesives

In ähnlicher Weise wie bei der Anpassung des TAPO-Kohäsivzonenmodells an die Warmfließkurvenscharen werden die Materialparameter des Konstitutivmodells an die Fließkurvenschar mit teilgehärteten Klebschichten aus Scher- und Kopfzugversuchen bei Raumtemperatur $\theta = \theta_0$ angepasst. Im Zuge der Anpassung an die Fließkurvenschar wird der Materialparameter τ_0 anhand der Messdaten identifiziert. Darüber hinaus wird in der Materialroutine der Parameter r_{cure} in die isotrope Verfestigungsspannung (6-151) mit

$$R_\theta(\theta) = \left(q_\theta \left[1 - \exp\left(-b_\theta\, r\right)\right] + H_\theta\, r\right) r_{\text{cure}} \tag{7-16}$$

gemäß des Ansatzes (6-144) eingeführt, der nach der Anpassung des Konstitutivmodells an die Messkurven durch die Funktion (6-154) ersetzt wird. Der Grund für diese Vorgehensweise ist die Vorgabe, die Verfestigungsspannung mit nur einer Funktion in Abhängigkeit des Aushärtegrads mit der geringst notwendigen Anzahl an Materialparametern zu beeinflussen. Beim Schädigungsansatz wird ähnlich vorgegangen, indem an

Tabelle 7-6: Materialparameter des reduzierten TAPO-Modells nach Anpassung an Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche mit teilausgehärteten Klebschichten bei Raumtemperatur
Table 7-6: Material parameters of reduced TAPO model after adaption to measurement data of tests with thick adherend shear and butt joint specimen and partially cured adhesives at ambient temperature

Beschreibung	Parameter	Werte			Einheit
		92%	78%	70%	
Fließfunktion (6-133)	$\tilde{a}_1$	0.4457	0.4457	0.4457	[-]
	$\tilde{a}_2$	0.1249	0.1249	0.1249	[-]
plastisches Potential (6-134)	$\tilde{a}_2^*$	0.3383	0.3383	0.3383	[-]
Verfestigung (6-145)	q	3.815	3.815	3.815	[MPa]
	b	45.68	45.68	45.68	$\left[\text{mm}^{-1}\right]$
	H	21.35	21.35	21.35	$\left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}\right]$
	r_{cure}	0.898	0.79	0.71	[-]
Anfangsfließspannung in Gl. (6-140)	τ_0	12.01	5.95	3.02	[MPa]
Schädigung (6-157)	n_{D}	2.0	2.0	2.0	[-]
kritischer Verschiebungssprung (6-160) und Bruchverschiebungssprung (6-161)	d_{I1}	0.000279	0.000279	0.000279	[mm]
	d_{I2}	0.3304	0.3304	0.3304	[mm]
	d_1	0.2065	0.2065	0.2065	[mm]
	d_2	0.3314	0.3314	0.3314	[mm]
	d_3	6.935	6.935	6.935	[-]
	$d_{\text{c}}^{\text{cure}}$	0.48	0.25	0.15	[-]
	$d_{\text{f}}^{\text{cure}}$	0.6	0.45	0.4	[-]

den kritischen Verschiebungssprung und Bruchverschiebungssprung jeweils die Parameter $d_{\mathrm{c}}^{\mathrm{cure}}$ $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{cure}}$ multipliziert werden mit

$$\Delta^{\mathrm{c}} = \left[d_{\mathrm{I1}} + d_{\mathrm{I2}} \exp\left(-d_3 \left\langle T \right\rangle\right)\right] \left[1 + m_{\mathrm{f}} \left(\theta - \theta_0\right)\right] d_{\mathrm{c}}^{\mathrm{cure}} \tag{7-17}$$

$$\Delta^{\mathrm{f}} = \left[d_1 + d_2 \exp\left(-d_3 \left\langle T \right\rangle\right)\right] \left[1 + m_{\mathrm{f}} \left(\theta - \theta_0\right)\right] d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{cure}} \quad , \tag{7-18}$$

die dann jeweils durch die Funktionen (6-165) ersetzt werden.

7.5 Ergebnis der Anpassung des TAPO-Kohäsivzonenmodells Result of the adaption of the TAPO cohesive zone model

Das endgültige Ergebnis der Optimierung ist in den Abbn. 7-10 dargestellt. Abb. 7-10(a) zeigt das Ergebnis der Anpassung an die Warmfließkurvenschar der Scherzugversuche für die Temperaturen $T = 22$ °C, 40 °C, 60 °C und 80 °C. Das TAPO-Kohäsivzonenmodell bildet die Versuche des LWF gut ab. Die Scherzugfestigkeit der Warmfließkurve aus dem Scherzugversuch bei 80 °C wird etwas unterschätzt. Hier ist jedoch ein Verfestigungsphänomen zu beobachten, dass im Konstitutivmodell nicht berücksichtigt wird. Ab einer Gleitung $\tan\gamma = 1$ findet eine Nachverfestigung statt, die in den Konstitutivgleichungen nicht berücksichtigt und aus Gründen der Einfachheit des Modells vernachlässigt wird – vgl. [P8714, S.].

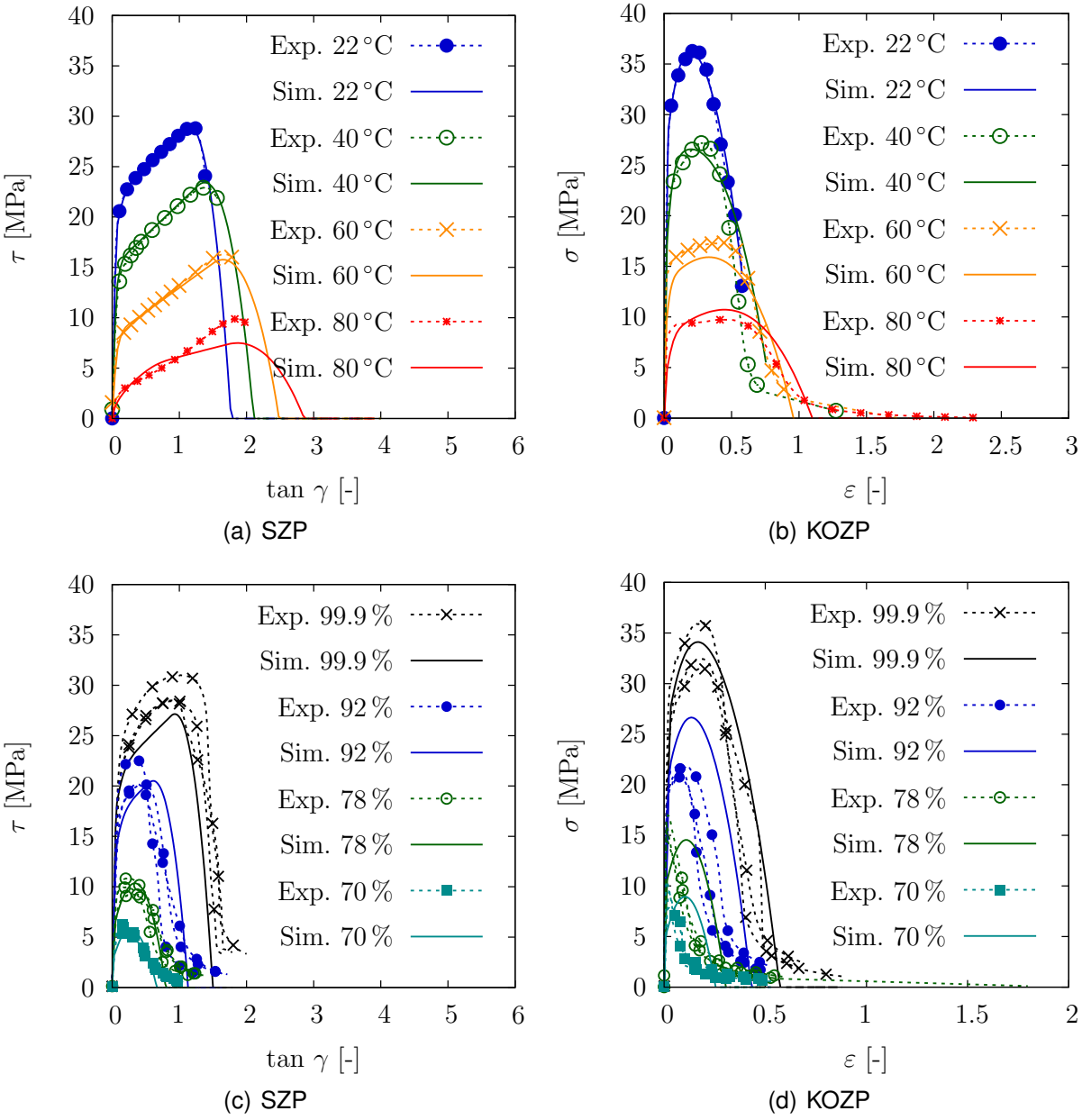
Das Ergebnis der Anpassung des Konstitutivmodells an die Warmfließkurvenschar der Kopfzugversuche ist in Abb. 7-10(b) zusammen mit den Messdaten für die Temperaturen $T = 22$ °C, 40 °C, 60 °C und 80 °C dargestellt. Das Konstitutivmodell bildet alle Temperaturkurven sehr gut ab. Lediglich die Warmfließkurve bei 60 °C wird leicht unterschritten, was im Sinne einer konservativen Prognose positiv zu bewerten ist. Da simultan an die Scher- und Kopfzugversuche angepasst wird, ist das Ergebnis der Simulation der Kopfzugprobe bei 80 °C besser als bei der Scherzugprobe, da so das optimale Ergebnis bzgl. des Scher- und Kopfzugversuchs gefunden wird. An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass die FE-Simulation des Scherzugversuchs in Abb. 7-10(a) bis zum Versagen durchgeführt wird. Die Messdaten der Scherzugversuche sind jedoch nicht bis zum Versagen aufgezeichnet worden. Im Rahmen der Identifikation wird auch die FE-Simulation lediglich bis zum aufgezeichneten Spannungs-Gleitungsverlauf durchgeführt.

Die Anpassung des Konstitutivmodells an die Fließkurven mit teilgehärteten Klebschichten an der Scherzugprobe für die Aushärtegrade $p = 99.9\,\%$, $p = 92\,\%$, $p = 78\,\%$ und $p = 70\,\%$ sind in Abb. 7-10(c) dargestellt. Das Konstitutivmodell bildet die Verfestigung und das Versagen aus den Versuchen trotz des einfachen Ansatzes in der Verfestigungsspannung gut ab, da die Ergebnisse der FE-Simulation stets in bzw. knapp unterhalb des Streubands der Versuche.

Das Ergebnis der Anpassung an die Kopfzugversuche mit teilgehärteten Klebschichten ist dahingegen als befriedigend zu bewerten. Die Gründe dafür sind in den Spannungs-Dehnungsverläufen aus den Messdaten der Versuche zu sehen. Bereits ab einem Aushärtegrad von $p = 92\,\%$ kann das Konstitutivmodell die Messdaten nur noch mäßig abbilden, um im Anschluss bei den niedrigeren Aushärtegraden die Messdaten noch einigermaßen zu treffen. In den Versuchen ist keine Verfestigung des Klebstoffs mehr zu erkennen und das Material scheint nach Erreichen des Spannungsmaximums sofort zu

entfestigen. Da das Konstitutivmodell simultan an die Messdaten der Scher- und Kopfzugversuche angepasst wird, ist nur so eine bestmögliche Korrelation zwischen den Simulations- und Messdaten zu erzielen.

Die Materialparameter des temperatur- und aushärtegradabhängigen TAPO-Kohäsivzonenmodells sind in der Tabelle 7-7 nebst Bezeichnungen und Gleichungsnummern der Konstitutivgleichungen zusammengestellt. Die FE-Berechnungen in Abb. 7-10 sind mit



(a) SZP (b) KOZP

(c) SZP (d) KOZP

Abbildung 7-10: Anpassung des Konstitutivmodells an die an die Warmfliesskurven aus Scher- (a) und Kopfzugversuchen (b) des LWF von Raumtemperatur bis 80 °C sowie an Fließkurven aus Scher- (c) und Kopfzugversuchen (d) des LWF mit teilausgehärteten Klebschichten oberhalb des Gelpunkts $p_{\mathrm{gel}} = 0.6$ unter quasistatisch zügiger Randbedingung mit der Gleit- und Dehnrate $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

Figure 7-10: Adaption of the constitutive model to the flow curves of test with the thick adherend shear (a) and butt joint specimen (b) between ambient temperature and 80 °C as well as test with the thick adherend shear (c) and butt joint specimen (d) with partially cured adhesives beyond gel point $p_{\mathrm{gel}} = 0.6$ under quasi static loading conditions with shear and strain rates $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

dem hier angegebenen Materialparametersatz durchgeführt worden. Für den viskoelastischen Modellteil werden die Materialparameter der Tabellen 7-1 und 7-2 zusammen mit den DIRICHLET-PRONY-Parametern in den Tabellen A-1 und A-2 verwendet.

Tabelle 7-7: Ergebnis der Identifikation der Materialparameter des TAPO-Kohäsivzonenmodells
Table 7-7: Result of identification of the material parameters of the TAPO cohesive zone model

Beschreibung	Parameter	Wert	Einheit
Fließfunktion (6-133)	$\tilde{a}_1$	0.4457	[-]
$\tilde{a}_2$ Gl. (6-139)	$\tilde{a}_{20}$	0.1249	[-]
	m_{a2}	$1.0970 \cdot 10^{-2}$	$\left[\mathrm{K}^{-1}\right]$
	θ_0	295.15	[K]
plastisches Potential (6-134)	$\tilde{a}_2^*$	0.3383	[-]
Isotrope Verfestigung Gln. (6-144), (6-151), (6-148), (6-149), (6-150), (6-154)	q_0	1.91557	[MPa]
	b_0	135.618	$\left[\mathrm{mm}^{-1}\right]$
	h_0	0.0	$\left[\frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{mm}}\right]$
	m_q	0.103464	$\left[\mathrm{K}^{-1}\right]$
	m_b	0.124202	$\left[\mathrm{K}^{-1}\right]$
	m_h	0.0	$\left[\mathrm{K}^{-1}\right]$
	θ_q	321.83	[K]
	θ_b	312.97	[K]
	θ_h	0.0	[K]
	q_1	1.90707	[MPa]
	b_1	44.0779	$\left[\mathrm{mm}^{-1}\right]$
	h_1	22.895	$\left[\frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{mm}}\right]$
	ϕ_1	0.38795	[-]
Anfangsfließspannung Gln. (6-143), (6-147), (6-152)	τ_0	42.18	[MPa]
	m_τ	0.01878	$\left[\mathrm{K}^{-1}\right]$
	θ_τ	288.8	[K]
	χ_1	1.2284	[-]
	p_{gel}	0.6044	[-]
Schädigung (6-157)	n_{D}	2.0	[-]
kritischer Verschiebungssprung und Bruchverschiebungssprung Gln. (6-166), (6-167), (6-162), (6-165)	$d_{\mathrm{I}1}$	0.000279	[mm]
	$d_{\mathrm{I}2}$	0.3304	[mm]
	d_1	0.2065	[mm]
	d_2	0.3314	[mm]
	d_3	6.935	[-]
	m_{f}	0.01054	$\left[\mathrm{K}^{-1}\right]$
	β_1	0.4662	[-]
	δ_1	0.6961	[-]
	δ_2	0.4130	[-]
	(d_4)	0.0	[-]

8 Validierung an Grund- und bauteilnahen Proben Validation using basic and component-type specimens

Patrick Kühlmeyer, Anton Matzenmiller

Die Prognosefähigkeit des Konstitutivmodells wird durch die Validierung der Modellantwort in der FE-Simulation mittels Messdaten aus Versuchen an bauteilähnlichen und Grundproben gezeigt. Im Zuge der Validierung wird die Bi-Metall-Probe aus dem FOSTA Projekt P 878 unter den Randbedingungen des Fertigungs- bzw. Betriebsprozesses simuliert und den jeweiligen Messergebnissen aus den Versuchen des LWF gegenübergestellt. Die Klebschicht wird in der Bi-Metall-Probe überwiegend auf Schub beansprucht. Weitere Versuche an Scherzugproben unter definierten thermomechanischen Beanspruchungen aus dem Projekt P 878 werden ebenfalls für die Validierung herangezogen. Hier wird insbesondere die Prognosegüte des temperatur- und aushärtegradabhängigen Plastizitäts- und Schädigungsmodells überprüft. Im vorliegenden Projekt werden Versuche an der Brückenprobe durchgeführt, die der Validierung des Konstitutivmodells während des Aushärteprozesses unter Zugbeanspruchung dienen.

For Validation, the response of the constitutive model in FE-simulation is compared to the data of tests with basic and component-type specimens. In the course of validation, the bi-metal specimen of the FOSTA project P 878 is simulated with the boundary conditions of the manufacturing and operation process and compared with the data of the tests by the LWF. Further tests with the thick adherend shear specimen under defined thermomechanical boundary conditions in the project P 878 are used to validate the temperature and cure dependend plasticity and damage model. In the present project, tests with the bridge specimen are conducted by the LWF and used for the validation of the constitutive model under tensile load during cure.

8.1 Bi-Metall-Probe Bi-metal specimen

8.1.1 Versuchsaufbau Test setup

Im Rahmen des FOSTA Projekts P 878 ist die Bi-Metall-Probe in Abbildung 8-1 als bauteilähnliche Probe entwickelt worden, die aus einem Stahl- und Aluminiumblechstreifen besteht – s. [P8714, S. 15 ff.]. Die Blechstreifen sind auf einer Seite fest eingespannt und auf der anderen Seite entlang einer definierten Überlappungslänge mit dem Strukturklebstoff *EP 1* verklebt – s. Abb. 8-1. Aufgrund der unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten des Stahl- $\alpha_{\mathrm{st}}^{\mathrm{th}} = 1.3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ und Aluminiumblechs $\alpha_{\mathrm{al}}^{\mathrm{th}} =$

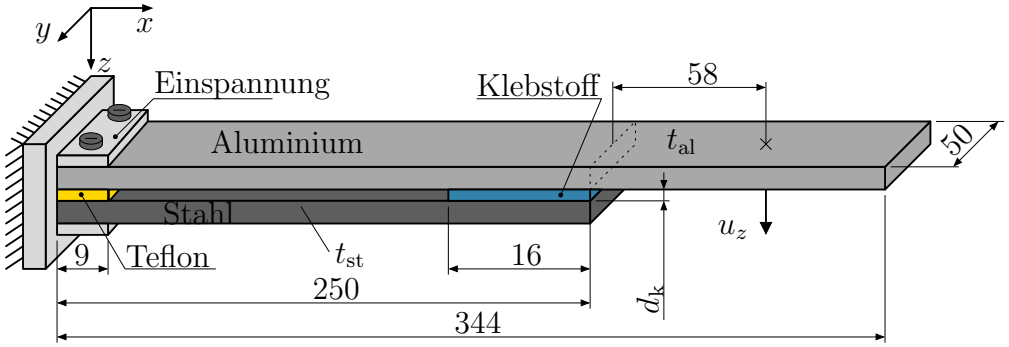


Abbildung 8-1: Prinzipskizze der Bi-Metall-Probe mit Abmessungen in [mm]
Figure 8-1: Principle of bimetallic test with dimensions in [mm]

$2.32 \cdot 10^{-5}$ K^{-1} verformen sich die Bleche bei einer Temperaturänderung unterschiedlich stark. Die unterschiedlichen Wärmeausdehnungen der Blechstreifen führen zur Deformation und Beanspruchung der Klebschicht, da die Bleche auf der entgegengesetzten Seite fest eingespannt sind.

Im Fall der Bi-Metall-Probe führt die Wärmeausdehnung der Bleche überwiegend zu einer Schubbeanspruchung der Klebschicht. Da die Klebschicht aufgrund ihrer Steifigkeit die Differenz der Wärmeausdehnungen zwischen den Substraten nicht vollständig ausgleicht, verbiegt sich die gesamte Probe aufgrund der Temperaturänderung.

Die beiden Blechstreifen haben eine Dicke von $t_{al} = t_{st} = 1.5\,$mm und die Klebschicht von $d_k = 0.3\,$mm. Das Stahlblech hat als Materialparameter den Elastizitätsmodul $E_{st} = 210000\,$MPa, die Dichte $\rho_{st} = 7850\,$kg/m^3 und die Querdehnzahl $\nu_{st} = 0.3$. Der Elastizitätsmodul des Aluminiumblechs beträgt $E_{al} = 70000\,$MPa, die Dichte $\rho_{al} = 2700\,$kg/m^3 und die Querdehnzahl $\nu_{al} = 0.34$. Für den Strukturklebstoff *EP 1* wird das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Konstitutivmodell mit den identifizierten Materialparametern verwendet. Die Skizze des Versuchsaufbaus in Abb. 8-1 zeigt die weiteren geometrischen Abmessungen der Bi-Metall-Probe.

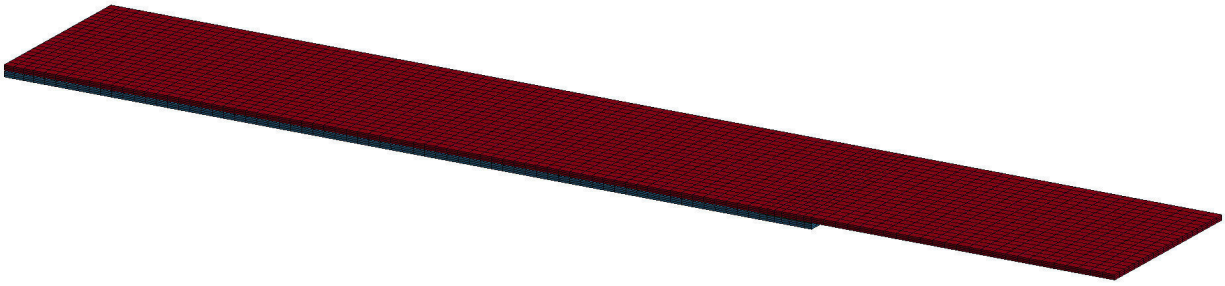
Die Durchbiegung u_z der Bi-Metall-Probe am freien Ende sowie die Relativverschiebung Δu_x zwischen den Substraten werden für die Validierung des Konstitutivmodells während des Versuchs am LWF aufgezeichnet. Dabei wird die Durchbiegung des frei überkragenden Alublechs im Abstand von $58\,$mm zwischen dem Messpunkt und der Überlappung in der Mitte der Probenbreite gemessen. Für die Messung der Relativverschiebung der Bleche an der Klebschicht wird je ein Messpunkt in der Mitte der Probenbreite auf dem Stahl- und Alublech direkt am Ende der Überlappung definiert.

Die Bi-Metall-Probe ist in [P8714] unter anderem für die Validierung der Konstitutivmodelle zur Beschreibung des thermoviskoelastisch-plastischen Verhaltens von Strukturklebstoffen in Fertigungs- und Betriebsprozessen entwickelt worden. Daher sind am LWF Bi-Metall-Proben unter zwei verschiedenen Versuchsrandbedingungen geprüft worden. In der ersten Versuchsdurchführung wird die Klebschicht vor dem Einspannen der Bi-Metall-Probe mit der definierten Klebschichtdicke $d_k = 0.3\,$mm vollständig warm ausgehärtet. Da sich die beiden Bleche während der Aushärtung frei Ausdehnen können, wird die Klebschicht nicht belastet und damit auch nicht beansprucht. Im Anschluss an die Aushärtung der Klebschicht wird die Bi-Metall-Probe wie in Abb. 8-1 dargestellt eingespannt und im Ofen einem Zeit-Temperaturverlauf ausgesetzt, der einer realen thermischen Betriebsbelastung entspricht. Dabei wird der gesamte Versuchsaufbau der Bi-Metall-Probe innerhalb von $6\,$min näherungsweise linear auf eine Temperatur von et-

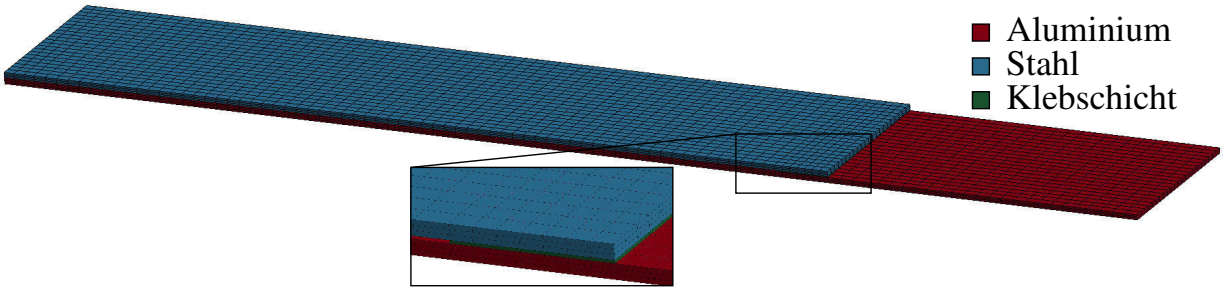
wa 81 °C erwärmt. Danach wird die Ofentemperatur für 125 min konstant auf 81 °C geregelt, um die Probe anschließend im Ofen unkontrolliert abkühlen zu lassen – s. [P8714, S. 237 ff.].
Beim zweiten Versuchsaufbau werden die beiden Bleche der Bi-Metall-Probe mit der unausgehärteten Klebschicht – wie in Abb. 8-1 skizziert – eingespannt. Der gesamte Versuchsaufbau wird anschließend im Ofen einem Zeit-Temperaturverlauf ausgesetzt, der einem typischen Zeit-Temperaturprofil aus der Fertigung der Klebverbindung während des KTL-Prozesses entspricht. Im Zuge der Versuchsdurchführung wird die Klebschicht zwischen den Substraten ausgehärtet. Dafür wird der Versuchsaufbau innerhalb von etwa 6 min nahezu linear auf etwa 180 °C im Ofen erwärmt, worauf eine Haltezeit von ca. 36 min folgt[1]. Anschließend wird der Versuchsaufbau unkontrolliert im Ofen abgekühlt – s. [P8714, S. 229 ff.].
Im vorliegenden Projekt werden die Messdaten der bimetallischen Versuche unter beiden Versuchsrandbedingungen für die Validierung des Konstitutivmodells verwendet. Dafür wird im Folgenden ein FE-Modell der Bi-Metall-Probe in LS-DYNA verwendet, um die beiden Versuchsdurchführungen zu simulieren.

8.1.2 FE-Modell
FE modell

Die Bi-Metall-Probe in Abb. 8-1 wird in LS-DYNA als FE-Modell erstellt, um die Versuche des LWF in [P8714] zu simulieren und so die Modellantwort mit den Messdaten zu vergleichen. Das FE-Modell der Bi-Metall-Probe ist in der Abb. 8-2 dargestellt.



(a) FE-Modell der Bi-Metall-Probe



(b) Bi-Metall-Probe mit Legende

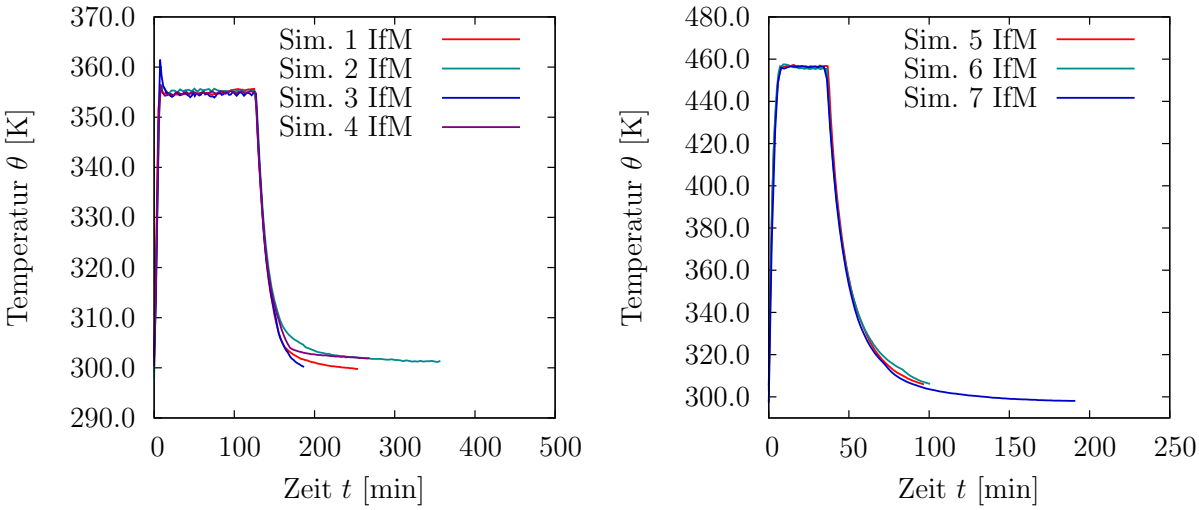
Abbildung 8-2: FE-Modell der Bi-Metall-Probe
Figure 8-2: FE model of the bimetal specimen

[1] Hinweis: Das Zeit-Temperaturprofil entspricht den Herstellerangaben für eine vollständige Aushärtung des Klebstoffs

Substrate Die beiden Bleche werden mit Volumenelementen unter Verwendung linearer Ansatzfunktionen modelliert. Da die Dicke der Bleche im Vergleich zur Länge und Breite sehr viel geringer ist, besteht in LS-DYNA die Möglichkeit, die Elementformulierung (ELFORM -2) für ungünstige Seitenverhältnisse der Elementkanten zu wählen – s. [LST15a, S. 35-57 ff.] und [Bor09]. Diese Elementformulierung ermöglicht, die Anzahl der Elemente über die Blechdicke und damit die Berechnungszeit bei gleichbleibender Konvergenz des FE-Modells zu reduzieren. Zur Beschreibung des Materialverhaltens der Bleche wird das isotrope hypoelastische Materialmodell MAT_ELASTIC [LST15b, S. 2-64 ff.] und für die Wärmeausdehnungen das Modell MAT_ADD_THERMAL_EXPANSION [LST15b, S. 2-85 f.] verwendet.

Klebschicht Für die Vernetzung der Klebschicht werden die Kohäsivzonenelemente mit der Elementformulierung (ELFORM 19) verwendet, so dass die Klebschicht mit einem Element über der Dicke vernetzt wird. Das Materialverhalten der Klebschicht wird mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Konstitutivmodell beschrieben. Dafür wird die Materialroutine als benutzerdefiniertes Kohäsivzonenmodell im FE-Modell definiert – s. [LST15b, S. 2-264 ff.].

Randbedingungen Die Bleche werden über eine Länge von $9\,\mathrm{mm}$ zwischen zwei Spannbacken geschraubt. An der Einspannstelle sorgt ein Abstandhalter dafür, dass der Abstand zwischen den Blechen der Klebschichtdicke $d_\mathrm{k} = 0.3\,\mathrm{mm}$ entspricht. Da neben der Verschraubung die isotrope Wärmeausdehnung aller an der Einspannung beteiligten Materialien zu einer zusätzliche Klemmung der Bleche führt, kann von einer festen Einspannung ausgegangen werden. Etwaige Effekte aufgrund der Verspannung der Bleche in der Einspannung sind an dieser Stelle für die Validierung irrelevant. Um jedoch artifizielle Spannungsüberhöhungen in den Blechen aufgrund einer quasi starren



(a) Zeit-Temperaturverläufe des Betriebs (b) Zeit-Temperaturverläufe der Fertigung (KTL)

Abbildung 8-3: Zeit-Temperaturverläufe für die FE-Simulation der Bi-Metall-Probe mit ausgehärteter Klebschicht unter Betriebslast (links) und die Aushärtung der Klebschicht in der Fertigung (rechts)
Figure 8-3: Time-temperature courses of the FE simulation of the bimetal specimen with cured adhesive under service loading (left) und curing of the adhesive during the test under manufacturing loading (right)

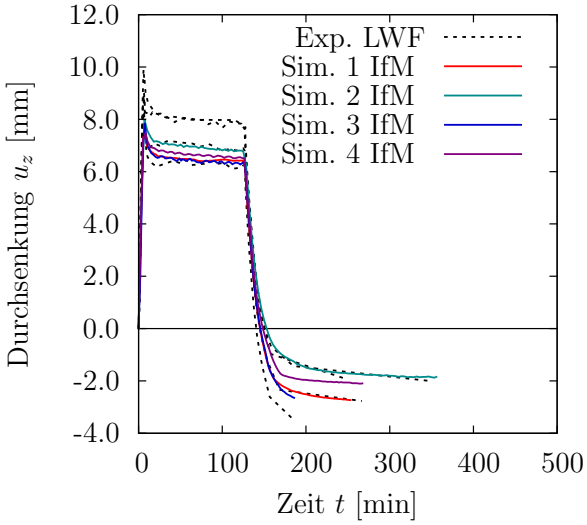
Einspannung zu vermeiden, sind die Freiheitsgrade an den Knoten der Bleche an der Einspannstelle so gewählt, dass sich die Bleche dort ungezwungen ausdehnen können. In der Symmetrieebene der Bi-Metall-Probe werden die Freiheitsgrade aller Knoten in y-Richtung gesperrt. Bei allen Knoten der beiden Bleche in der x-z-Ebene auf Höhe der Einspannung werden die Freiheitsgrade in x-Richtung gesperrt, um die Bleche an der Einspannung zu fixieren. Um den Abstand von $0.3\,$mm zwischen den Blechen zu gewährleisten, werden die Freiheitsgrade aller Knoten in der x-y-Ebene an der Unterseite des Aluminium- und Oberseite des Stahlblechs im Bereich der Einspannung in z-Richtung gesperrt.

Laut den Ausführungen des LWF in [P8714, S. 14 f.], wird die Temperatur im Versuch an zwei verschiedenen Punkten auf der Bi-Metall-Probe gemessen, um eine näherungsweise gleichmäßige Erwärmung der Probe im Ofen nachzuweisen. Dabei wird gezeigt, dass die Zeit-Temperaturverläufe der beiden Messpunkte in guter Näherung übereinander liegen – s. bspw. [P8714, S. 230, Abb. 7.1]. Aufgrund dessen kann bei der Simulation der Bi-Metall-Probe von einer zusätzlichen Lösung des thermischen Feldproblems abgesehen werden. Da die Temperaturverteilung entlang der Probe näherungsweise homogen ist, werden die Zeit-Temperaturverläufe aus den Versuchen als Randbedingungen auf die Knoten des FE-Modells vorgegeben.

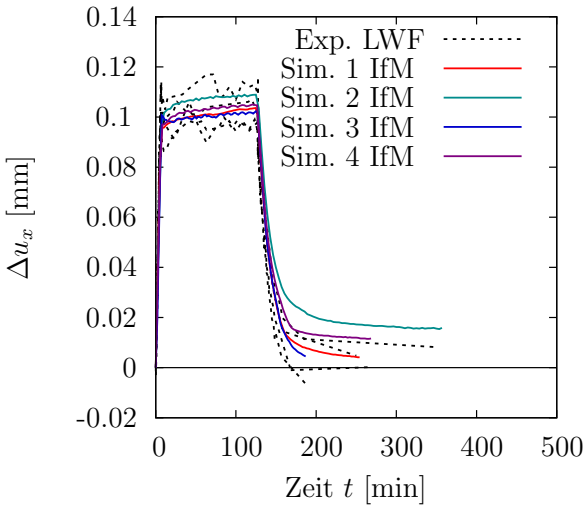
8.1.3 Ergebnis der Validierung
Result of the validation

Die Ergebnisse der Validierung des Konstitutivmodells sind in den Abbn. 8-4 dargestellt. Abb. 8-4(a) zeigt die Simulations- und Messdaten der Durchsenkung u_z von vier Versuchen an der Bi-Metall-Probe mit einer vor dem Versuch ausgehärteten Klebschicht. Die Durchsenkung u_z erreicht nach der Aufheizphase Werte im Bereich zwischen $8\,$mm und $10\,$mm. Danach fällt sie aufgrund von Relaxationsprozessen gegen die Gleichgewichtsspannung in der Klebschicht ab und erreicht Werte zwischen $6\,$mm und $8\,$mm während die Temperatur im Ofen auf einen konstanten Wert geregelt wird. Nach Abkühlung der Bi-Metall-Probe zurück auf Raumtemperatur geht die Durchsenkung u_z nicht mehr auf Null zurück, sondern überschreitet ihre Ursprungslage aufgrund reversibler inelastischer Dehnungen in der Klebschicht. In Abb. 8-4(b) sind die Simulations- und Messdaten der Relativverschiebung über die Zeit geplottet. Die Relativverschiebung steigt im Aufheizprozess bis zu einem Wert zwischen $0.09\,$mm und $0.1\,$mm an und bleibt während der Haltephase in der Zeit-Temperaturkurve nach dem kurzen Relaxationsprozess in der Klebschicht konstant. Während des Abkühlprozesses der Bi-Metall-Probe gehen die Relativverschiebungen nahezu zurück gegen Null, womit die Durchsenkung der Bi-Metall-Probe nach der Abkühlung plausibel ist.

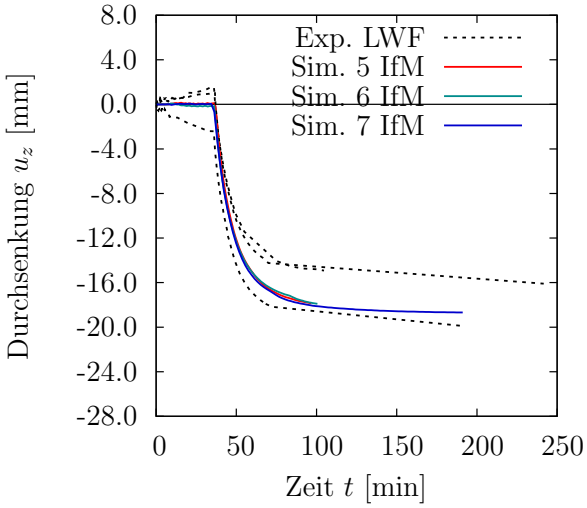
Der Vergleich der Durchsenkung u_z zwischen den Simulations- und Messdaten der Bi-Metall-Probe mit unausgehärteter Klebschicht zu Versuchsbeginn ist in Abb. 8-4(c) dargestellt. Erwartungsgemäß ist die Steifigkeit der aushärtenden Klebschicht im Aufheizprozess zu Beginn des Versuchs noch nicht hoch genug, um signifikanten Widerstand gegen die von den Substraten auferlegte Scherung zu leisten. Da die Klebschicht erst in der Haltephase des Zeit-Temperaturverlaufs aushärtet, findet eine deutliche Durchsenkung der Bi-Metall-Probe erst während der Abkühlung statt. Die Versuchsdaten weisen während der Haltephase positive und negative Durchsenkungen auf, deren Ursache



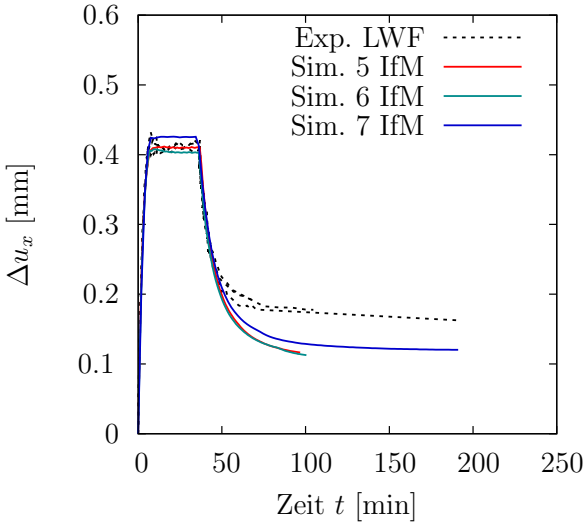
(a) Durchsenkung u_z aus Versuch mit ausgehärteter Klebschicht



(b) Relativverschiebung Δu_x aus Versuchen mit ausgehärteter Klebschicht



(c) Durchsenkung u_z aus Versuch mit aushärtender Klebschicht



(d) Relativverschiebung Δu_x aus Versuch mit aushärtender Klebschicht

Abbildung 8-4: Ergebnisse der Validierung an der Durchsenkung u_z (a) und Relativverschiebung Δu_x (b) der Bi-Metall-Probe mit ausgehärteter Klebschicht und Durchsenkung u_z (c) und Relativverschiebung Δu_x der Bi-Metall-Probe mit Aushärtung der Klebschicht im Versuch
Figure 8-4: Result of the deflection u_z (a) and relative displacement Δu_x (b) at the bimetal specimen with cured adhesive and the deflection u_z (c) and relative displacement Δu_x during cure of the adhesive in the test

bis zu diesem Zeitpunkt nicht geklärt werden konnte. Die Relativverschiebung nimmt hier deutlich höhere Werte als in Abb. 8-4(b) an, was mit der nahezu widerstandslosen Wärmeausdehnung der Bleche aufgrund der unausgehärteten Klebschicht zusammenhängt.

Fazit Die Validierung des Konstitutivmodells an der Bi-Metall-Probe zeigt, dass unter den Versuchsrandbedingungen eines Fertigungs- und Betriebsprozesses die Simulationsergebnisse sehr gut mit den Messergebnissen korrelieren. Die Durchsenkung u_z korreliert in beiden Fällen gut mit den Messergebnissen und die FE-Simulation bildet alle wesentlichen Phänomene beider Prozesse adäquat ab.

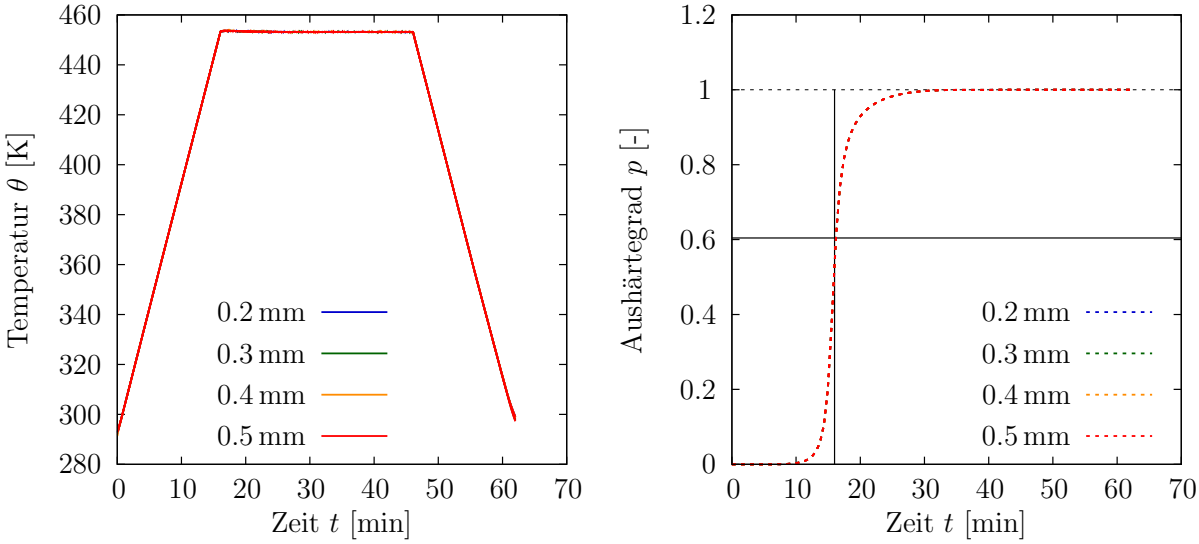
Das gilt zu großen Teilen auch für den Vergleich der Relativverschiebungen Δu_x zwischen den Mess- und Simulationsdaten. Einzig die Relativverschiebung im bimetallischen Versuch mit der aushärtenden Klebschicht zeigt nach dem Abkühlprozess bei allen Proben eine Abweichung zwischen Mess- und Simulationsdaten.

Des Weiteren muss an dieser Stelle angemerkt werden, dass in keinem der beiden Versuchsszenarios plastische Deformationen oder Schädigung aufgetreten sind. Daher wird das Konstitutivmodell anhand weiterer Versuche aus dem Projekt P 878 validiert, die sowohl plastische Deformationen als auch Schädigung zeigen.

8.2 Scherzugproben unter definierter thermomechanischer Belastung
Thick adherend shear specimen under defined thermomechanical loading

8.2.1 Versuchsaufbau
Test setup

Im Rahmen des Projekts P 878 sind Versuche an der Scherzugprobe durchgeführt worden, bei denen Klebschichtschädigung während des Aushärteprozesses mit definierten thermomechanischen Belastungen erzwungen wird. Dafür werden Scherzugproben mit unausgehärteten Klebschichten in die Zugmaschine eingespannt und simultan mit einem Zeit-Temperatur- und Zeit-Verschiebungsverlauf belastet. Die in die Scherzugprobe eingeprägte thermische Belastung ist dem Zeit-Temperaturverlauf nachempfunden, der für die Aushärtung von Klebschichten innerhalb des KTL-Trocknungsprozesses üblich ist. Dieser Verlauf orientiert sich an den Herstellervorgaben für die Durchführung des Aushärteprozesses beim Strukturklebstoff *EP 1* .



(a) Zeit-Temperaturverläufe $\theta(t)$ (b) Aushärtegrads $p(t)$ in der Zeit t

Abbildung 8-5: Zeit-Temperatur- (a) und Zeit-Aushärtegradverläufe (b) aus der Simulation der Versuche an der Scherzugprobe
Figure 8-5: Time-temperatur course(a) and time-cure course(b) of the simulation of the test with the thick adherend shear specimen

Abb. 8-5(a) zeigt die Zeit-Temperaturverläufe $\theta(t)$ aus den Versuchen an der Scherzugprobe des LWF in [P8714, S. 105 ff.]. Die Temperatur wird bei allen Proben innerhalb von $15\,\text{min}$ linear von Raumtemperatur auf $180\,°\text{C}$ erhöht und anschließend auf diesem Temperaturniveau für $30\,\text{min}$ gehalten. Danach werden die Scherzugproben innerhalb von $15\,\text{min}$ linear von $180\,°\text{C}$ auf Raumtemperatur kontrolliert abgekühlt – vgl. [P8714, S. 106, Abb. 4.104].

Während die Scherzugproben dem Zeit-Temperaturprofil $\theta(t)$ 8-5(a) ausgesetzt sind, werden sie jeweils simultan mit verschiedenen Zeit-Verschiebungsverläufen $\bar{u}$ belastet. Die Randbedingungen für die FE-Simulation der verschiedenen Versuche sind in den Abbn. 8-7(a) und 8-8(a) dargestellt sind. Jeder Zeit-Verschiebungsverlauf $\bar{u}$ steigt innerhalb von $15\,\text{min}$ linear auf ein Verschiebungsplateau unterschiedlicher Höhe an und verweilt für eine Dauer von $30\,\text{min}$ simultan zum Zeit-Temperaturprofil auf diesem Wert. Im Anschluss wird die Verschiebung ausgehend vom jeweiligen Plateau simultan mit der Zeit-Temperaturkurve auf null zurückgefahren.

In den Versuchen werden die Verschiebungsrandbedingung jeweils so geregelt, dass sich in der Klebschicht bestimmte lokale Relativverschiebungen einstellen. Die thermischen Dehnungen der Fügepartner zwischen den Punkten für die Messung der lokalen Verschiebungen auf der Scherzugprobe werden im Zuge der Regelung am LWF berücksichtigt und kompensiert, so dass sich in der Klebschicht die vorgegebenen Relativverschiebungen $\Delta_\text{t}(t)$ über der Zeit t einstellen.

Für die Validierung werden die lokalen Zeit-Relativverschiebungsverläufe der Klebschicht $\Delta_\text{t}(t)$ mit den Plateauwerten $0.2\,\text{mm}$, $0.3\,\text{mm}$, $0.4\,\text{mm}$ und $0.5\,\text{mm}$ verwendet, die einer Gleitung $\tan\gamma = \Delta_t/d_\text{k}$ in der Klebschicht zwischen $66.6\,\%$ und $166.6\,\%$ entsprechen. Die sich einstellenden lokalen Zeit-Relativverschiebungsverläufe der Klebschicht Δ_t sind in den Abbn. 8-7(b) und 8-8(b) über der Zeit t dargestellt.

8.2.2 FE-Modell
FE model

Substrate Das FE-Modell der Scherzugprobe ist in Abb. 8-6 dargestellt. Die Abmaße der Stahlsubstrate entsprechen den geometrischen Angaben in Kapitel 3.2.1. Die Stahlsubstrate haben als Materialparameter den Elastizitätsmodul $E_\text{st} = 210000\,\text{MPa}$, die Dichte $\rho_\text{st} = 7850\,\text{kg/m}^3$, die Querdehnzahl $\nu_\text{st} = 0.3$ und den Wärmeausdehnungskoeffizienten $\alpha_\text{st}^\text{th} = 1.3 \cdot 10^{-5}\,\text{K}^{-1}$. Gemäß den Angaben in [P9515b, S. 89] werden die Stahlfügeteile mit vollintegrierten Hexaeder-Elementen (ELFORM 2) mit linearen Ansatzfunktionen vernetzt. Zur Beschreibung des Materialverhaltens wird das isotrope hypoelastische Materialmodell MAT_ELASTIC [LST15b, S. 2-64 ff.] und für die isotrope Wärmeausdehnung das Modell MAT_ADD_THERMAL_EXPANSION [LST15b, S. 2-85 f.] verwendet.

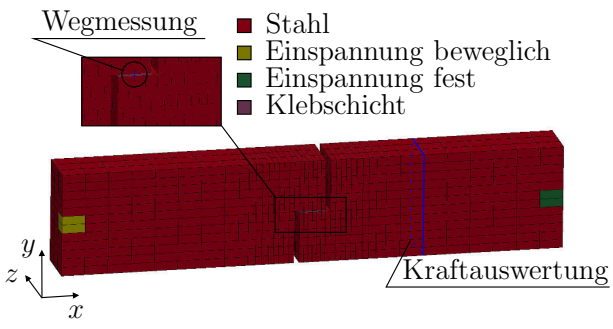


Abbildung 8-6: FE-Modell der Scherzugprobe
Figure 8-6: FE model of the thick adherend shear specimen

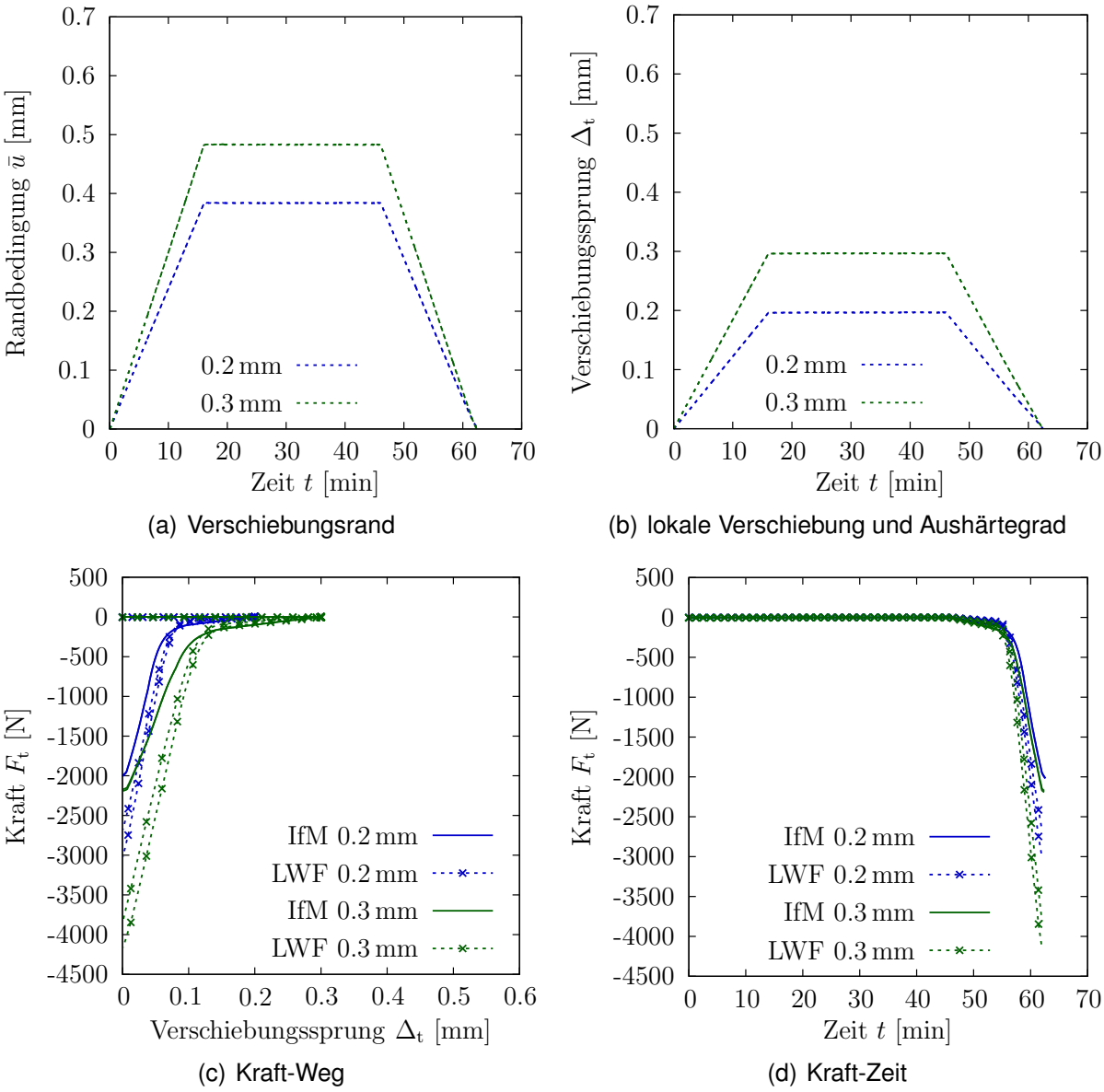
Klebschicht Die Klebschicht wird mit dem achtknotigen Kohäsivzonenelement (ELFORM 19) mit einem Element über der Dicke vernetzt. Die Klebschichtdicke beträgt $d_\mathrm{k} = 0.3\,\mathrm{mm}$. Das Materialverhalten der Klebschicht wird mit der vorgestellten Materialroutine als benutzerdefiniertes Kohäsivzonenmodell berechnet.

Auswertung Die Kraft wird über die in Abb. 8-6 gekennzeichnete Ebene ausgewertet. Für die Auswertung der lokalen Relativverschiebung der Klebschicht werden die Knotenverschiebungen zweier übereinander liegender Knoten in der Mitte der Klebschicht ausgelesen. Damit ist sichergestellt, dass die Relativverschiebung aufgrund der Wärmeausdehnung der Substrate in x-Richtung kompensiert wird.

Randbedingungen Aufgrund der einfachen Spiegelsymmetrie der Scherzugprobe wird lediglich die halbe Probe modelliert. Dafür werden die Freiheitsgrade der aller Knoten in der Symmetrieebene in z-Richtung gesperrt. Die Einspannung wird im Versuch mithilfe von Schrauben realisiert. Daher werden die Randbedingungen mithilfe des gelben und grünen Starrkörpers in das FE-Modell eingebracht. Da in diesem Versuch die Wärmeausdehnung der Substrate nicht unerheblich und in der Zeit veränderlich ist, wird die Größe der Starrkörper für die Einprägung der Randbedingungen auf ein Minimum reduziert. Damit werden artifizielle Spannungsüberhöhungen in den Elementen der Substrate aufgrund behinderter thermischer Dehnungen im Bereich der Starrkörper weitestgehend vermieden. Der grüne Starrkörper in Abb. 8-6 dient der festen Einspannung der Scherzugprobe, weshalb hier alle translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade gesperrt werden. Die Verschiebungsrandbedingung $\bar{u}$ wird mittels Starrkörperverschiebung des gelben Starrkörpers x-Richtung vorgegeben.
Unter Annahme einer homogenen Temperaturverteilung in der Scherzugprobe werden jeweils die Zeit-Temperaturkurven, die in den Versuchen am LWF gemessen worden sind, als Temperaturrandbedingung auf alle Knoten des FE-Modells vorgegeben.

8.2.3 Ergebnis der Validierung
Result of the validation

In Abb. 8-5(b) sind die Aushärtegrade aus den FE-Berechnungen der Scherzugproben mit den Plateauwerten der lokalen Relativverschiebungen $\Delta_\mathrm{t}(t)$ von $0.2\,\mathrm{mm}$ bis $0.5\,\mathrm{mm}$ dargestellt. Der Aushärtegrad steigt aufgrund des Zeit-Temperaturprofils 8-5(a) während der Aufheizphase in den ersten Minuten nur leicht und zwischen der zehnten und 20. Minute stark progressiv an. Nach der Aufheizphase erreicht der Aushärtegrad einen Wert zwischen $p = 50\,\%$ und $p = 60\,\%$ und liegt damit noch unterhalb des Gelpunkts $p_\mathrm{gel} = 60\,\%$. Während der 30-minütigen Haltephase im Zeit-Temperaturprofil läuft der Aushärtegrad asymptotisch gegen $p = 100\,\%$. Da bei allen Versuchen der Zeit-Temperaturverlauf nahezu identisch ist, verlaufen auch die dargestellten Aushärtegrade in Abb. 8-5(b) augenscheinlich direkt übereinander – s. a. Abb. A-2.
Die Ergebnisse der Kraftverläufe $F_\mathrm{t}(\Delta_\mathrm{t})$ und $F_\mathrm{t}(t)$ der FE-Simulation und der thermoviskoelastisch-plastischen Versuche an der Scherzugprobe mit den Plateauwerten $0.2\,\mathrm{mm}$ und $0.3\,\mathrm{mm}$ sowie $0.4\,\mathrm{mm}$ und $0.5\,\mathrm{mm}$ der lokalen Relativverschiebungen sind in den Abbn. 8-7 und Abbn. 8-8 dargestellt. Abb. 8-7(b) zeigt den zeitlichen Verlauf der lokalen Relativverschiebung der Klebschicht. Das Ergebnis der Kraftmessung ist in den Abbn. 8-7(c) und 8-7(d) dargestellt. In der Aufheizphase ist trotz der Deformation der



(a) Verschiebungsrand

(b) lokale Verschiebung und Aushärtegrad

(c) Kraft-Weg

(d) Kraft-Zeit

Abbildung 8-7: Randbedingungen (a), lokale Verschiebungssprünge in der Klebschicht (b), Kraft-Weg- (c) und Kraft-Zeitverläufe (c) aus den FE-Simulation für die Relativverschiebung der Klebschicht $0.2\,\mathrm{mm}$ $0.3\,\mathrm{mm}$ der thermoviskoelastisch-plastischen Versuche an der Scherzugprobe in [P8714]

Figure 8-7: Boundary conditions (a), local displacement jumps in the adhesive (b), force-displacement course (c) and force-time course (c) of the FE simulation for the relative displacement of the adhesive $0.2\,\mathrm{mm}$ $0.3\,\mathrm{mm}$ of the thermoviscoelastic-plastic tests with the thick adherend shear specimen in [P8714]

Klebschicht in Abbn. 8-7(b) und 8-8(b) augenscheinlich kein Anstieg in der Kraft F_t über dem Verschiebungssprung Δ_t und der Zeit t zu erkennen – vgl. Abbn. 8-7(c) und 8-7(d) sowie Abbn. 8-8(c) und 8-8(d). Wie die Abb. 8-5(b) zeigt, hat der Aushärtegrad im Klebstoff den Gelpunkt p_{gel} noch nicht überschritten und der Klebstoff ist noch flüssig. Unter Berücksichtigung der hohen Temperatur und niedrigen Gleitrate im Verlauf des Aufheizprozesses bietet der Klebstoff nur geringen bis gar keinen Widerstand gegen die ihm durch die Substrate eingeprägte Deformation. Es entwickeln sich daher geringe bis keine Überspannungen $\mathbf{t}^{\mathrm{ov}}$ im Konstitutivmodell. Nach Ablauf der Haltephase ist der Klebstoff nahezu vollständig ausgehärtet – s. Abb. 8-5(b). Da der Klebstoff ausge-

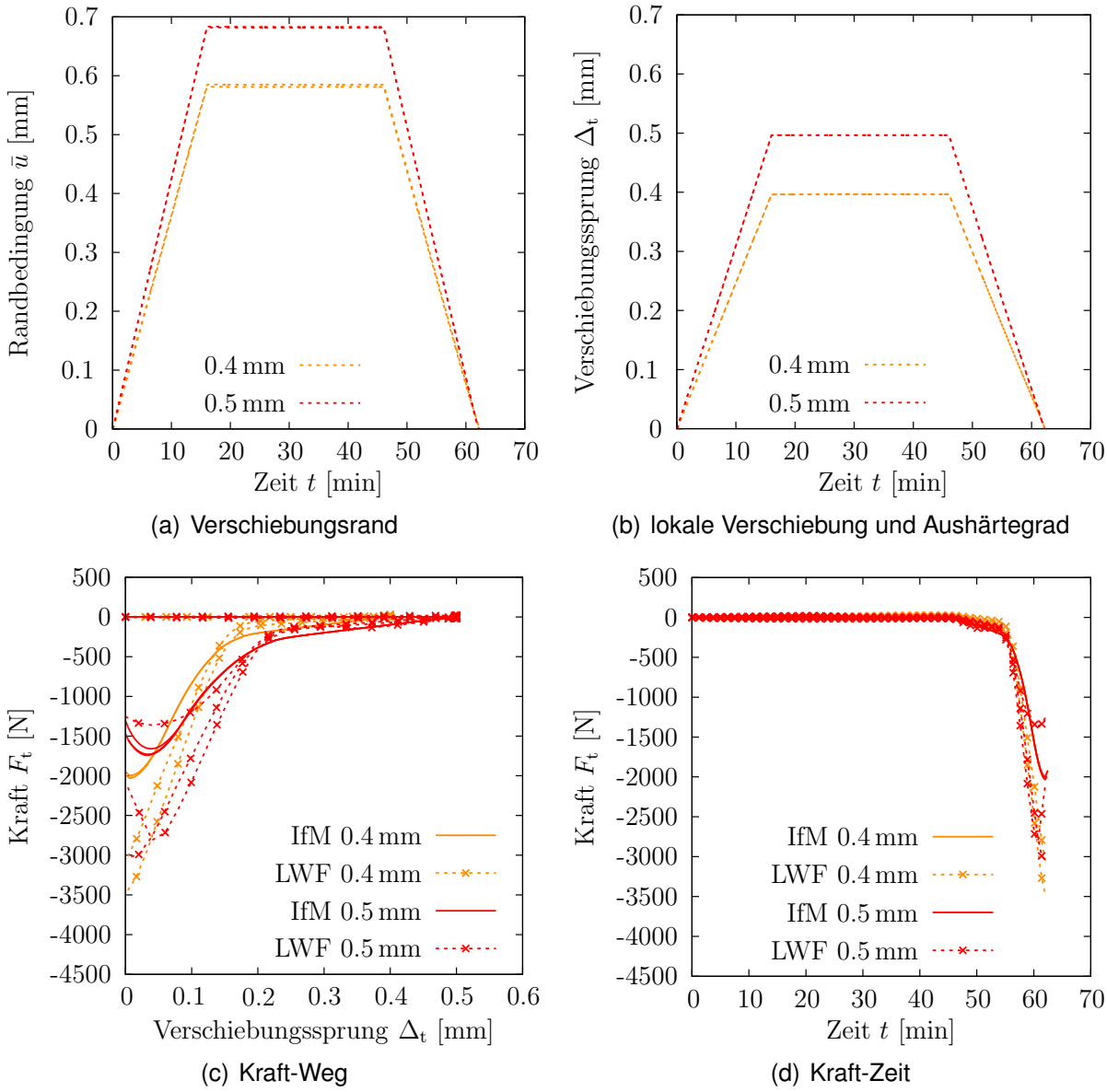


Abbildung 8-8: Randbedingungen (a), lokale Verschiebungssprünge in der Klebschicht (b), Kraft-Weg- (c) und Kraft-Zeitverläufe (c) aus den FE-Simulation für die Relativverschiebung der Klebschicht 0.4 mm 0.5 mm der thermoviskoelastisch-plastischen Versuche an der Scherzugprobe in [P8714]

Figure 8-8: Boundary conditions (a), local displacement jumps in the adhesive (b), force-displacement course (c) and force-time course (c) of the FE simulation for the relative displacement of the adhesive 0.4 mm 0.5 mm of the thermoviscoelastic-plastic tests with the thick adherend shear specimen in [P8714]

härtet ist, kann er im Folgenden Kräfte deutlich besser übertragen. Des Weiteren ist er von der flüssigen in die feste Phase übergegangen und die Gleichgewichtssteifigkeit hat sich in Abhängigkeit des Aushärtegrads vollständig aufgebaut. Daher führt die Deformation der Klebschicht im Abkühlprozess zu eine deutlichen Erhöhung der Kraft F_t in der FE-Simulation und im Versuch. Im Abkühlprozess korreliert die berechnete Kraft F_t anfänglich gut mit der im Versuch gemessenen. Bei der Relativverschiebung mit dem Plateauwert 0.2 mm weicht die Simulation mit zunehmender Rückverformung immer mehr von den Messwerten ab – s. Abb. 8-7(c). Im Fall der Rückverformung 0.3 mm wird diese Abweichung deutlicher, wobei die Maximalkraft im Versuch sogar die Scherzugfestigkeit

des Strukturklebstoffs *EP 1* bei Raumtemperatur übersteigt, die bei etwa $3\,\mathrm{kN}$ liegt. Bei der Rückverformung der Scherzugprobe von $0.4\,\mathrm{mm}$ auf Null werden die Abweichung in der Maximalkraft zwischen den Daten aus der FE-Simulation und den Messdaten des Versuchs wieder geringer und liegen bei der Rückverformung von $0.5\,\mathrm{mm}$ im Streuband der Versuchsdaten. In allen gezeigten Prozessen tritt plastisches Fließen auf und bei lokalen Rückverformungen, die größer als $0.3\,\mathrm{mm}$ sind, findet augenscheinlich Schädigung in der FE-Simulation und den Versuchen statt.

Fazit Anhand der erzwungenen thermomechanischen Belastung der Scherzugprobe während und nach der Aushärtung des Klebstoffs werden alle Phänomene gezeigt, die im vorgestellten Konstitutivmodell berücksichtigt werden. Die Kräfte werden in allen Versuchen zu Beginn recht gut prognostiziert, jedoch sind die Abweichungen der zwischen der Modellprognose und den Messdaten bei mittleren Rückverformungen im Bereich zwischen $0.3\,\mathrm{mm}$ und $0.4\,\mathrm{mm}$ groß. Da hier die Scherzugfestigkeit des untersuchten Klebstoffs *EP 1* bei Raumtemperatur deutlich überschritten wird, kann diese Abweichung nur damit erklärt werden, dass im Fall der Rückverformung ein zusätzliches Verfestigungsphänomen auftritt, das derzeit in den Konstitutivgleichungen nicht berücksichtigt wird. Im vorliegenden Fall wird das Konstitutivmodell lediglich anhand der Klebstoffscherung validiert. Eine weitere Validierung an der Kopfzugprobe ist notwendig, um die Verfestigung und Schädigung auch im Fall von Zugbeanspruchungen zu zeigen.

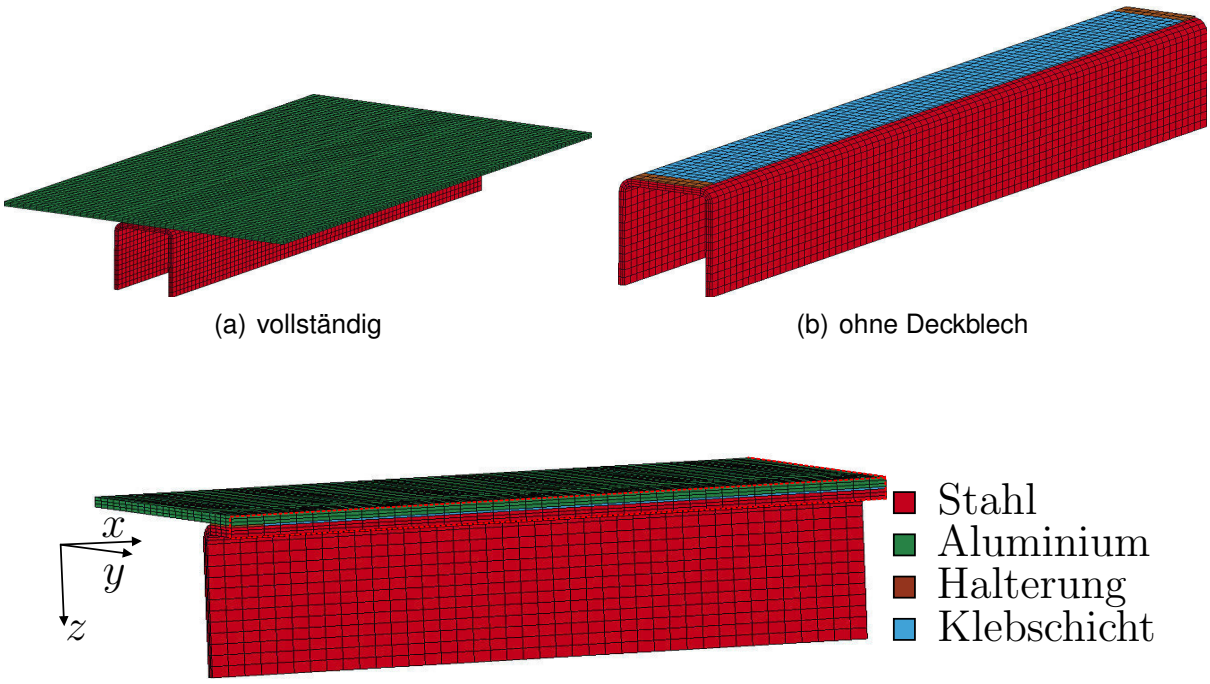
8.3 Brückenprobe
Bridge specimen

8.3.1 Versuchsaufbau
Test setup

Die Brückenprobe besteht aus einem U-Profil aus Stahl, auf das ein Deckblech aus Aluminium geklebt wird. U-Profil und Deckblech werden mittels Klemmen an der linken und rechten Seite der Probe fixiert, da der Klebstoff zwischen den Substraten noch flüssig ist. Die Brückenprobe wird im Ofen erwärmt, um die Klebschicht zwischen den Substraten auszuhärten. Die Erwärmung des Stahl- und Aluminiumsubstrats führt zur Wärmeausdehnung der beiden Werkstoffe, die aufgrund der verschiedenen Wärmeausdehnungskoeffizient unterschiedlich sind. Die Fixierung der beiden Fügeteile auf der linken und rechten Seite der Brückenprobe führt zur Beulung des Aluminiumdeckblechs über dem U-Profil aus Stahl, da der teilgehärtete Klebstoff während der Aufheizphase noch nicht in der Lage ist, das Deckblech am U-Profil zu halten. Durch die Beulung des Aluminiumdeckblechs wird die Klebschicht zwischen den Fügeteilen deformiert und beansprucht.

8.3.2 FE-Modell
FE model

Substrate Das FE-Modell der Brückenprobe ist in den Abbn. 8-9 dargestellt. Abb. 8-9(a) zeigt das vollständige FE-Modell der Brückenprobe und Abb. 8-9(b) ohne Deckblech. Die beiden Bleche werden mit Volumenelementen unter Verwendung linearer



(a) vollständig (b) ohne Deckblech

(c) Ausnutzung der Spiegelsymmetrien

Abbildung 8-9: FE-Modell der Brückenprobe vollständig (a), ohne Deckblech (b) und unter Ausnutzung der Spiegelsymmetrien (c)
Figure 8-9: FE model of the whole bridge specimen (a), without cover plate (b) and with respect to the mirror symmetries (c)

Ansatzfunktionen modelliert. Da die Dicke der Bleche im Vergleich zur Länge und Breite sehr viel geringer ist, besteht in LS-DYNA die Möglichkeit die Elementformulierung (ELFORM -2) für ungünstige Seitenverhätnisse der Elementkanten zu wählen – s. [LST15a, S. 35-57 ff.] und [Bor09]. Diese Elementformulierung ermöglicht die Anzahl der Elemente über die Blechdicke und damit die Berechnungszeit bei gleichbleibender Konvergenz des FE-Modells zu reduzieren. Zur Beschreibung des Materialverhaltens der Bleche wird das isotrope hypoelastische Materialmodell MAT_ELASTIC [LST15b, S. 2-64 ff.] und für die Wärmeausdehnungen das Modell MAT_ADD_THERMAL_EXPANSION [LST15b, S. 2-85 f.] verwendet.

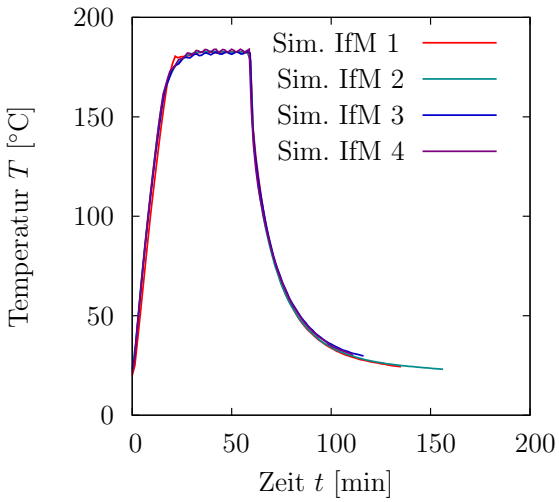
Klebschicht Für die Vernetzung der Klebschicht werden die Kohäsivzonenelemente mit der Elementformulierung (ELFORM 19) verwendet, so dass die Klebschicht mit einem Element über der Dicke vernetzt wird. Das Materialverhalten der Klebschicht wird mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Konstitutivmodell beschrieben. Dafür wird die Materialroutine als benutzerdefiniertes Kohäsivzonenmodell im FE-Modell definiert – s. [LST15b, S. 2-264 ff.].

Randbedingungen Die Klebschicht und die Halterungen sind in Abb. 8-9(b) deutlich zu erkennen. Die Halterungen dienen im Versuch der Einhaltung der Klebschichtdicke $d_\mathrm{k} = 0.3\,\mathrm{mm}$ an den Klemmen, die das Deckblech mit dem U-Profil an der linken und rechten Seite fixieren. Im FE-Modell sind die Halterungen Starrkörper, die das Aluminiumdeckblech und Stahlprofil an der Stelle fixieren, an der im Versuch die Klemmung

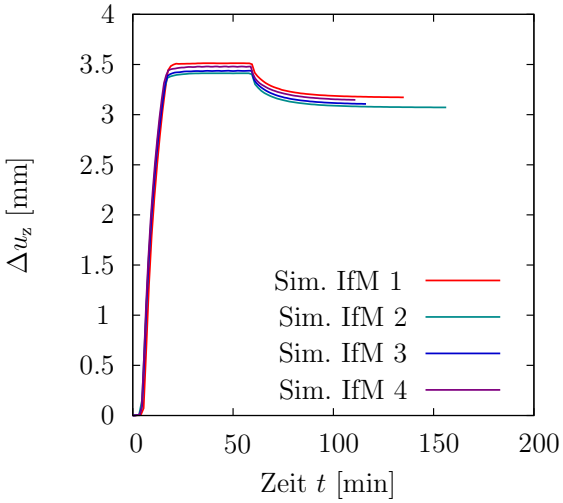
mithilfe der Zwingen erreicht wird.
Da die Brückenprobe bzgl. der y-z- und x-z-Ebene spiegelsymmetrisch ist, wird unter Ausnutzung dieser Symmetrien lediglich ein viertel der Probe modelliert. Dies führt zu einer erheblichen Zeitersparnis, da die benötigte Rechenkapazität aufgrund der deutlich geringeren Knotenanzahl gesenkt wird. In Abb. 8-9(c) ist das FE-Modell unter Ausnutzung der Symmetrieebenen – die im Modell mit den roten gepunkteten Linien umrandet sind – dargestellt. In der y-z-Symmetrieebene wird die Symmetrierandbedingung eingebracht, indem die Freiheitsgrade aller Knoten in dieser Ebene in x-Richtung gesperrt werden. Für die Symmetrierandbedingung in der x-y-Ebene werden die Knotenverschiebungen aller Knoten in der Ebene in y-Richtung verhindert.
Um das Beulungsphänomen des Aluminiumdeckblechs in der FE-Simulation zu erzwingen, wird eine künstliche Imperfektion in das FE-Modell eingebracht, indem alle Knoten in der y-z-Symmetrieebene um 0.01 mm in z-Richtung verschoben werden.

8.3.3 Ergebnis der Validierung
Result of the validation

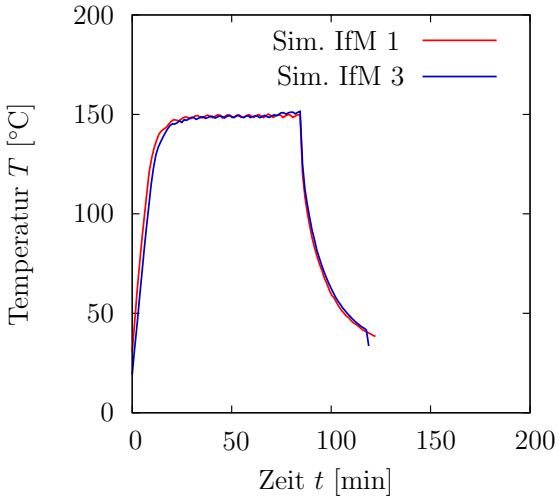
Die Ergebnisse der Relativverschiebungen Δu_z zwischen dem Stahlprofil und Aluminiumblech aus der FE-Simulation der Brückenprobe für die Zeit-Temperaturkurven mit den maximalen Temperaturen $T_{\max} = 180$ °C, 150 °C und 130 °C sind jeweils neben den Zeit-Temperaturkurven für die Temperaturrandbedingungen in Abb. 8-10 dargestellt.



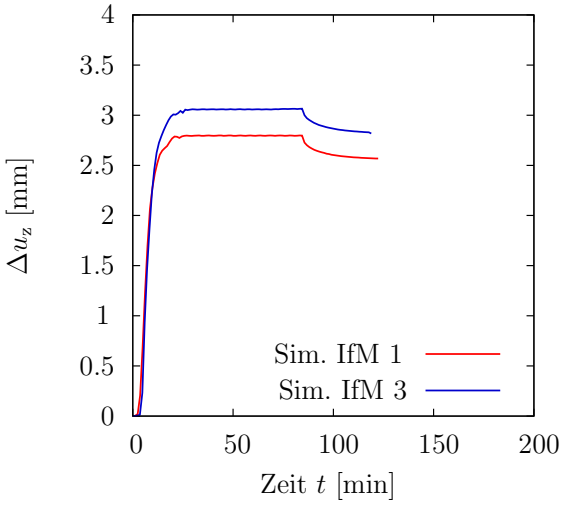
(a) Zeit-Temperaturkurve $T_{max} = 180$ °C



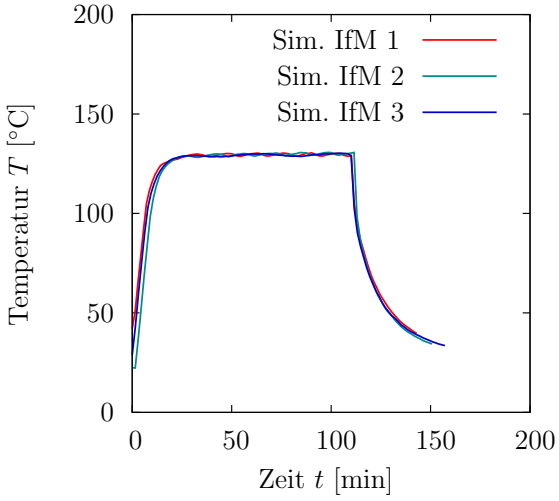
(b) Relativverschiebung $\Delta u_z(t)$ für $T_{max} = 180$ °C



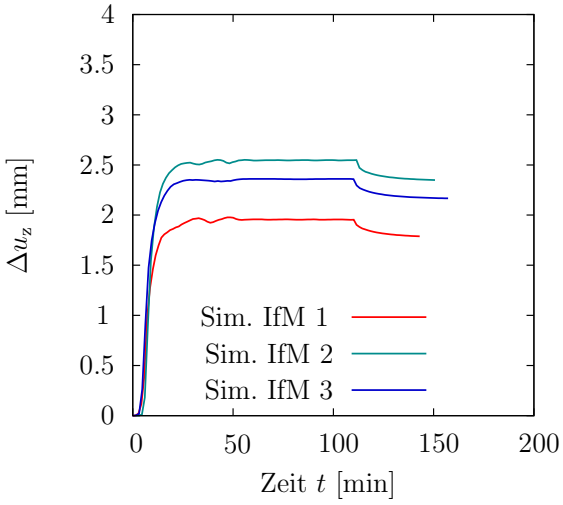
(c) Zeit-Temperaturkurve $T_{max} = 150$ °C



(d) Relativverschiebung $\Delta u_z(t)$ für $T_{max} = 150$ °C



(e) Zeit-Temperaturkurve $T_{max} = 130$ °C



(f) Relativverschiebung $\Delta u_z(t)$ für $T_{max} = 130$ °C

Abbildung 8-10: Zeit-Temperaturkurven $T(t)$ und Relativverschiebungen Δu_z zwischen dem Stahlprofil und Aluminiumblech für die Versuche mit $T_{max} = 180$ °C, 150 °C und 130 °C
Figure 8-10: Time-temperature courses (left) and relative displacements Δu_z between the steel profile and the aluminium cover plate for the tests with $T_{max} = 180$ °C, 150 °C und 130 °C

9 Zusammenfassung Summary

Zur Senkung der CO_2-Emmissionen und dem damit verbundenen ressourceneffizienten und belastungsgerechten Leichtbau wird das Multi-Material-Design eingesetzt. Das klebtechnische Fügen mittels warmhärtender, einkomponentiger, zähmodifizierter Klebstoffsysteme auf Epoxidharzbasis stellt eine Schlüsseltechnologie zur Umsetzung des Multi-Material-Designs dar. Die Betriebseigenschaften der Klebverbindung werden maßgeblich durch den Aushärteprozess mit dazugehörender thermisch induzierter Klebstoffdeformation und Schädigung infolge der $\Delta\alpha$-Problematik beeinflusst. Darüber hinaus verursachen thermische Ausdehnungs- sowie chemische Schrumpfprozesse der Klebschichten infolge der Klebstoffaushärtung Materialspannungen. Der Klebstoff durchläuft im Aushärteprozess verschiedene Phasen, ausgehend von einem viskoelastischen Fluid über einen viskoelastischem Festkörper im entropieelastischen Zustand hin zu einem viskoelastischem Fluid im energieelastischen Zustand.
Zur Beurteilung und Quantifizierung der im Prozess der Warmaushärtung auftretenden Deformationen, Spannungen und Schädigungen ist das Verfahren der numerischen Simulation unerlässlich, da keine geeigneten zerstörungsfreien Prüfverfahren existieren. Um ein besseres Verständnis für die genannten Einflüsse zu gelangen, wurde im Rahmen dieses Projektes auf Basis des temperaturabhängigen TAPO-Modells ein Konstitutivmodell enwickelt und als benutzerdefiniertes Materialmodell in die Finite-Elemente-Software LS-Dyna implementiert. Das temperaturabhängige TAPO-Modell wurde dabei um ein thermoviskoelastisches, aushärtegradabhängiges Teilmodell erweitert. Das thermoviskoelastische Teilmodell berücksichtigt den Einfluss des Aushärtegrades und der Temperatur über die Verschiebung der Relaxationszeiten im Sinne der thermo- und chemorheologischen Einfachheit. Im thermoplastischen Teilmodell wirkt sich der Einfluss des Aushärtegrades auf den Fließbeginn und auf die nichtlineare Verfestigungsspannung aus.
Zur Bedatung des erläuterten Konstitutivmodells wurden experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Dies sind im Wesentlichen die Dynamische Differenz Kalorimetrie, die Dynamisch Mechanische Analyse sowie quasistatisch zuügige werkstoffmechanische Untersuchungen. Auf Basis der Dynamischen Differenz Kalorimetrie konnte ein reaktionskinetisches Modell aufgestellt und bedatet werden, welches den Aushärtegrad infolge eines beliebigen Temperatur-Zeit-Profils berechnet. Dies wurde mit einem verallgemeinerten Ansatz nach Kamal et al. umgesetzt.
Die aushärtegradabhängigen, thermoviskoelastischen Zusammenhänge wurden auf Basis der Dynamisch Mechanischen Analyse untersucht. So konnte durch Versuche unter variierenden Aushärtegraden gezeigt werden, dass mit Hilfe der Annahme der thermo- und cheomorheologischen Einfachheit zwei separate Verschiebungsfunktionen identifiziert werden können, welche das viskoelastische Spektrum in Form einer Supermasterkurve beschreiben. Auf Basis dieser Supermasterkurve kann mit Hilfe der reduzierten Zeit unter beliebiger Temperatur- und Aushärtegradhistorie die viskoelastische Materi-

alantwort berechnet werden.
Zur Untersuchung der Plasizität und Schädigung in Abhängigkeit des Aushärtegrades wurden Versuche an der dicken Scherzugprobe und an der Kopfzugprobe durchgeführt. An die hieraus entstandenen Fließkurvenscharen konnte schließlich das aushärtegradabhängige Plastizitäts- und Schädigungsmodell angepasst werden. Die temperaturabhängigen Gleichungen des Plastizitäts- und Schädigungsmodells wurden auf Basis eines vorangegangenen FOSTA-Projektes P878 beschrieben.
Zur Validierung wurde die sogenannte Brückenprobe eingesetzt, welche zusätzlich den Effekt der Mäanderbildung infolge der Klebschichten aufzeigt. Es konnte durch Separierung der Mehrelementprobe zu Einzelproben ein erster Zusammenhang zwischen der Reduktion der effektiven Klebfläche sowie der im Aushärteprozess aufgebrachten Verschiebung in Kopfzugrichtung gezeigt werden. Das erweiterte TAPO-Modell wurde darüber hinaus an Versuchen der Bimetallprobe aus dem Projekt P878 validiert. Die Relaxationsvorgänge, welche im Konstitutivmodell beschrieben sind, wurden anhand von Stufenrelaxationsversuchen an der dicken Scherzugprobe nachgewiesen.
Als Ergebnis der Validierung kann festgestellt werden, dass das konstitutive Modell relativ gut mit den experimentellen Versuchsdaten korreliert. Die Ergebnisse der Brückenprobe konnten jedoch nur einschränkend als Validierung verwendet werden, da zusätzlich zu den materialseitigen Beanspruchungen geometrische Einflüsse infolge der Mäanderbildung und eine damit verbundene Reduktion der effektiven Klebfläche auftreten, die im Konstitutivmodell nicht berücksichtigt werden.

Literaturverzeichnis

[AC97] Douglas Adolf und Robert Chambers. Verification of the capability for quantitative stress prediction during epoxy cure. *Polymer*, 38(21):5481–5490, 1997.

[AC07] D. Adolf und R. Chambers. A thermodynamically consistent, nonlinear viscoelastic approach for modeling thermosets during cure. *Journal of Rheology*, 51(1):23 – 50, 2007.

[ACC04] D. Adolf, R. Chambers, und James M. Caruthers. Extensive validation of a thermodynamically consistent, nonlinear viscoelastic model for glassy polymers. *Polymer*, 45(13):4599–4621, 2004.

[AM90] Douglas Adolf und James E. Martin. Time-Cure Superposition during Cross-Linking. *Macromelcules*, 23:3700–3704, 1990.

[AM96] Douglas Adolf und James E. Martin. Calculation of Stresses in Crosslinking Polymers. *Journal of Composite Materials*, 30:13–34, 1996.

[AMC+98] D. B. Adolf, J. E. Martin, R. S. Chambers, S. N. Burchett, und T. R. Guess. Stress during thermoset cure. *Journal of Materials research*, 13(3), 1998.

[Ark13] Igor V. Arkhangel'skii. *Non-isothermal kinetic methods: Workbook and laboratory manual*, volume 1 of *Max Planck research library for the history and development of knowledge : Textbooks*. Ed. Open Acess, Berlin, 1. publ edition, 2013.

[BBB+13] W. Böhme, M. Brede, F. Burbulla, C. Fehrenbach, O. Hesebeck, S. Kilchert, J. Lienhard, R. Mahnken, S. Marzi, A. Matzenmiller, Michael May, D. Memhard, N. Nörenberg, L. Reissig, und H. Voß. Robustheit und Zuverlässigkeit der Berechnungsmethoden von Klebverbindungen mit hochfesten Stahlblechen unter Crashbedingungen. Abschlussbericht des Forschungsvorhabens P 828, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA), Sohnstr. 65, Düsseldorf, 2013.

[BHL+12] Ilja N. Bronstein, Juraj Hromkovic, Bernd Luderer, Hans-Rudolf Schwarz, Jochen Blath, Alexander Schied, Stephan Dempe, Gert Wanka, und Siegfried Gottwald. *Taschenbuch der mathematik*. Springer-Verlag, 2012.

[BM13a] Christoph Bröcker und Anton Matzenmiller. An enhanced concept of rheological models to represent nonlinear thermoviscoplasticity and its energy storage behavior . *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25:749–778, 2013.

[BM13b] F. Burbulla und A. Matzenmiller. Materialmodell für Klebstoffe aus duktil modifizierten Epoxidharzen (TAPO-Modell). In *Robustheit und Zuverlässigkeit der Berechnungsmethoden von Klebverbindungen mit hochfesten Stahlblechen unter Crashbedingungen*. Technischer Bericht zum Projekt P 828, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e. V. (FOSTA), Sohnstr. 65, 40237 Düsseldorf, 2013.

[Bor09] Thomas Borrvall. A heuristic attempt to reduce transverse shear locking in fully integrated hexahedra with poor aspect ratio. *7. European LS-DYNA Conference, Salzburg, 14.-15. Mai 2009*, 2009.

[Brö14] C. Bröcker. *Materialmodellierung für die simultane Kalt-/Warmumformung auf Basis erweiterter rheologischer Modelle*. PhD thesis, Universität Kassel,Fachbereich Maschinenbau, Institut für Mechanik, 2014.

[Bur15] F. Burbulla. *Kontinuumsmechanische und bruchmechanische Modelle für Werkstoffverbunde*. PhD thesis, Universität Kassel,Fachbereich Maschinenbau, Institut für Mechanik, 2015.

[BW89] M. Baumgaertel und H. H. Winter. Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data. *Rheologica Acta*, 28(6):511–519, 1989.

[CS94] Wai-Fah Chen und Atef F. Saleeb. *Constitutive equations for engineering materials: Elasticity and modeling*, volume 37. Elsevier, 1994.

[DLB13] A. Droste, A. Lutz, und C. Brändli. volume 355 of *Die Bibliothek der Technik*. Süddeutscher Verlag onpact GmbH, 2013.

[EBM+00] Yongsung Eom, Louis Boogh, Véronique Michaud, Paul Sunderland, und Jan-Anders Månson. Time-Cure-Temperature Superposition for the Prediction 01 Instantaneous Viscoelastic Properties During Cure. *Polymer Engineering and Science*, 40(6):1281–1292, 2000.

[EG83a] John B. Enns und John K. Gillham. Effect of the extent of cure on the modulus, glass transition, water absorptio, and density of an amine–cured epoxy. *Journal of Applied Polymer Science*, 28(9):2831–2846, 1983.

[EG83b] John B. Enns und John K. Gillham. Time-Temperature-Transformation (TTT) Cure Diagram: Modeling the Cure Behavior of Thermosets. *Journal of Applied Polymer Science*, 28:2567–2591, 1983.

[Fer80] J. D. Ferry. *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley & Sons, 3. edition, 1980.

[Flo53] P. J. Flory. Cornell University Press, 1953.

[FLO76] W. N. Findley, J. S. Lai, und K. Onaran. *Creep and Relaxtion of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Dover Publications, New York, 1976.

[GHW11] Dietmar Gross, Werner Hauger, und Peter Wriggers. *Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, numerische Methoden*, volume Band 4, Ed. 8 of *Technische Mechanik*. Springer, Heidelberg, 8. aufl. edition, 2011.

[GM08] S. Gerlach und A. Matzenmiller. Kontinuumsmechanischer Modellansatz II. 2008.

[GS15] Wolfgang Grellmann und Sabine Seidler. *Kunststoffprüfung*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2015.

[Hab09] G. Habenicht. *Kleben. Grundlagen, Technologien, Anwendungen*. Springer-Verlag, 6. edition, 2009.

[HBP98] Dietger Hesekamp, Hans C. Broecker, und Manfred H. Pahl. Chemo-Rheology of Cross-Linking Polymers . *Chemical Engineering and Technology*, 21(2):149–153, 1998.

[HHF03] G. W. Höhne, W. F. Hemminger, und H.-J. Flammersheim. *Differential Scanning Calorimetry*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2. edition, 2003.

[Hil63] R. Hill. Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles. *J. Mech. Phys. Solids*, 11:357–372, 1963.

[HJM04] O. Hahn, J. Jendrny, und R. Mahnken. Simulation der Fügeteilverformung während der Warmaushärtung von Klebstoffen: Modellierung und experimentelle Untersuchungen an einem Schiebedachdeckel. International Congress on FEM Technology, 22. CAD-FEM Meeting, November 10-12, 2004, International Congress Center Dresden, Germany. CAD-FEM, 2004.

[HM96] Peter J. Halley und Michael E. Mackay. Chemorheology of Thermosets—An Overview . *Polymer Engineering and Science*, 36(5):593–609, 1996.

[Hol00] G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics*. John Wiley&Sons., Ltd, 2000.

[Hos10] M. Hossain. *Modelling and Computation of Polymer Curing*. PhD thesis, Universität Erlangen-Nürnberg, Technische Fakultät, Lehrstuhl für Technische Mechanik, 2010.

[HPS09a] M. Hossain, G. Possart, und P. Steinmann. A finite strain framework for the simulation of polymer curing. Part I: elasticity . *Computational Mechanics*, 44:621–630, 2009.

[HPS09b] M. Hossain, G. Possart, und P. Steinmann. A small-strain model to simulate the curing of thermosets . *Computational Mechanics*, 43(6):769–779, 2009.

[HPS10] M. Hossain, G. Possart, und P. Steinmann. A finite strain framework for the simulation of polymer curing. Part II. Viscoelasticity and shrinkage . *Computational Mechanics*, 46(3):363–375, 2010.

[Int14] Internationalen Organisation für Normung. Kunststoffe – dynamische differenz-thermoanalyse (dsc) – teil 2: Bestimmung der glasübergangstemperatur und der glasübergangsstufenhöhe (iso 11357-2:2013), deutsche fassung en iso 11357-2:2014, 2014.

[JC83] G. R. Johnson und W. H. Cook. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures. *Proc. 7th int. Symp. on Ballistics, The Hague*, pages 541–547, 1983.

[JC85] G. R. Johnson und W. H. Cook. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain raes, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21:31–48, 1985.

[Jen04] J. Jendrny. *Entwicklung von Berechnungsmodellen zur Abschätzung der Verformung geklebter dünnwandiger Stahlbauteile in Leichtbaukonstruktionen während der Warmaushärtung*. PhD thesis, Universität Paderborn, Fakultät Maschinentechnik, Laboratorium für Werkstoff- und Fügetechnik, 2004.

[Kac99] L. M. Kachanov. Rupture time under creep conditions. *International Journal of Fracture*, 97:11–18, 1999.

[Kam74] M. R. Kamal. Thermoset Characterization for Moldability Analysis. *Polymer Engineering and Science*, 14(3):231–239, 1974.

[Kia00] M. S. Kiasat. *Curing shrinkage and residual stresses in viscoelastic thermosetting resins and composites*. PhD thesis, Delft University of Technology, 2000.

[KM14] P. Kühlmeyer und A. Matzenmiller. Constitutive modelling of thermo-viscoelastic-plastic behaviour of adhesively bonded joints. In *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 14, pages 325–326, 2014.

[Kra86] Arnold Krawietz. *Materialtheorie*. Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens. Springer, 1986.

[KS73] M. R. Kamal und S. Sourour. Kinetics and Thermal Characterization of Thermoset Cure. *Polymer Engineering and Science*, 13(1):59–64, 1973.

[Kur10] B. Kurnatowski. *Zweiskalensimulation von mikroheterogenen Strukturen aus spröden Faserverbundwerkstoffen*. PhD thesis, Universität Kassel, Fachbereich Maschinenbau, Institut für Mechanik, 2010.

[KW96] Yeong K. Kim und Scott R. White. Stress relaxation behavior of 3501–6 epoxy resin during cure. *Polymer Engineering & Science*, 36(23):2852–2862, 1996.

[Lan15] R. Landgraf. *Modellierung und Simulation der Aushärtung polymerer Werkstoffe*. PhD thesis, TU Chemnitz, Fakultät für Maschinenbau, Institut für Mechanik und Thermodynamik, 2015.

[Lem85] J. Lemaître. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107:83–89, 1985.

[LH07] A. Lion und P. Höfer. On the phenomenological representation of curing phenomena in continuum mechanics. *Archive of Mechanics*, 59(1):59–89, 2007.

[Lie14] C. Liebl. *Viskoelastich-viskoplastische Modellierung von Strukturklebstoffen während der Aushärtung*. PhD thesis, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Institut für Mechanik, 2014.

[LIK+15] R. Landgraf, J. Ihlemann, S. Kolmeder, A. Lion, H. Lebsack, und C. Kober. Modelling and simulation of acrylic bone cement injection and curing within the framework of vertebroplasty. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 95(12):1530–1547, 2015.

[Lio00] Alexander Lion. Thermomechanik von Elastomeren, 2000. Berichte des Instituts für Mechanik 1/2000.

[LJY12] C. Liebl, M. Johlitz, und B. Yagimli. Simulation of curing-induced viscoplastic deformation: a new approach considering chemo-thermomechanical coupling. *Archive of Applied Mechanics*, 82:1133–1144, 2012.

[LJYL12] C. Liebl, M. Johlitz, B. Yagimli, und A. Lion. Three-dimensional chemo-thermomechanically coupled simulation of curing adhesives including viscoplasticity and chemical shrinkage. *Computational Mechanics*, 49:603–615, 2012.

[LL11] C. Liebl und A. Lion. A one-dimensional approach to the chemical and thermo-mechanical coupled modeling of curing adhesives including plasticity. In *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 11, pages 405–406, 2011.

[LST15a] LSTC. *LS-DYNA keyword user's manual – volume I – 03/23/15*. Livermore, California, USA, 2015.

[LST15b] LSTC. *LS-DYNA keyword user's manual – volume II – Material Models – 03/23/15*. Livermore, California, USA, 2015.

[Mah05] R. Mahnken. Simulation of strength difference for adhesive materials in finite deformation elasto-plasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194:4097–4114, 2005.

[Mah13] R. Mahnken. Thermodynamic consistent modeling of polymer curing coupled to visco–elasticity at large strains . *International Journal of Solids and Structures*, 50:2003–2021, 2013.

[MdBS+04] M. H. H. Meuwissen, H. A. de Boer, H. L. A. H. Steijvers, P. J. G. Schreurs, und M. G. D. Geers. Residual stresses in microelectronics induced by thermoset packaging materials during cure. *Microelectronics Reliability*, 44:1985–1994, 2004.

[Men11] S. Menzel. *Zur Berechnung von Klebverbindungen hybrider Karosseriestrukturen beim Lacktrocknungsprozess*. PhD thesis, TU Dresden, Fakultät für Maschinenwesen, 2011.

[MK16] A. Matzenmiller und P. Kühlmeyer. Temperature dependent TAPO model for failure analysis of adhesive bonds subjected to thermal service loading. In *14. LS-DYNA Forum, Bamberg 2016* , 2016.

[ML60] L. W. Morland und E. H. Lee. Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials with Temperature Variation. *Transactions of the Society of Rheology*, 4:233–263, 1960.

[MP09] Joseph D. Menczel und R. Bruce Prime. *Thermal analysis of polymers: Fundamentals and applications*. John Wiley, Hoboken, N.J, 2009.

[Mur12] Sumio Murakami. *Continuum damage mechanics: a continuum mechanics approach to the analysis of damage and fracture*, volume 185 of *Solid Mechanics and its Applications*. Springer Science & Business Media, 2012.

[MW69] M. Menzinger und Re Wolfgang. The meaning and use of the arrhenius activation energy. *Angewandte Chemie International Edition*, 8(6):438–444, 1969.

[Nie69] L. E. Nielsen. Cross-Linking–Effect on Physical Properties of Polymers . *Journal of Macromolecular Science*, 3(1):69–103, 1969.

[OMW01] D. J. O'Brien, P. T. Mather, und S. R. White. Viscoelastic Properties of an Epoxy Resin during Cure. *Journal of Composite Materials*, 35(10):883–904, 2001.

[P6708] M. Brede and M. Schlimmer A. Matzenmiller R. Mahnken O. Hahn K. Dilger P. Gumbsch K. Thoma O. D. Hennemann. Methodenentwicklung zur Berechnung von höherfesten Stahlklebverbindungen des Fahrzeugbaus unter Crashbelastung. Abschlussbericht des Forschungsvorhabens P 676, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA), Sohnstr. 65, Düsseldorf, 2008.

[P7912] Matzenmiller, A., Kurnatowski, B., Hanselka, H., Bruder, T., Schmidt, H., Mayer, B., Schneider, B., Kehlenbeck, H., Nagel, C. und Brede, M. (2012). Schwingfestigkeitsauslegung von geklebten Stahlbauteilen des Fahrzeugbaus unter Belastung mit variablen Amplituden. Forschung für die Praxis P796 Abschlussbericht. Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA), Sohnstr. 65, 40237 Düsseldorf. Verlag und Vertriebsgesellschaft mbH, Düsseldorf. Förderkennzeichen: IGF-Nr. 307 ZN. Projektleitung: Brede, M., Matzenmiller, A. und Hanselka, H. Abschlussbericht des Forschungsvorhabens P 796, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA), Sohnstr. 65, Düsseldorf, 2012.

[P8714] A. Lion and A. Matzenmiller and G. Meschut and P. Kühlmeyer and D. Teutenberg and C. Liebl. Methodenentwicklung zur Simulation und Bewertung fertigungs- und betriebsbedingter Klebschichtschädigungen infolge Temperaturwechselbeanspruchung. Abschlussbericht des Forschungsvorhabens P 878, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA), Sohnstr. 65, Düsseldorf, 2014.

[P9515a] G. Meschut and O. Hahn and M. Bobbert and A. Vogel and A. Matzenmiller and M. Schmerbauch and B. Mayer and M. Brede and S. Marzi and O. Hesebeck and O. Klapp and M. Baumert and I. Kididane. Experimentelle Kennwertermittlung und Simulation von strukturellen Klebverbindungen mit elastoplastischen und bruchmechanischen Kohäsivelementen. Abschlussbericht des Forschungsvorhabens P 957, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA), Sohnstr. 65, Düsseldorf, 2015.

[P9515b] G. Meschut and O. Hahn and D. Hein and A. Matzenmiller and A. Nelson. Experimentelle und numerische Untersuchungen des Crashverhaltens hybridgefügter Verbindungen. Abschlussbericht des Forschungsvorhabens P 958, Forschungsvereinigung Stahlanwendung e.V. (FOSTA), Sohnstr. 65, Düsseldorf, 2015.

[Pri15] Konstantin Priesnitz. *On local panel distortions due to hot-curing adhesives*. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology, 01.01.2015.

[PRN66] G. O. Piloyan, I. D. Ryabchikov, und O. S. Novikova. Determination of Activation Energies of Chemical Reactions by Differential Thermal Analysis. *Nature*, 212:1229, 1966.

[Rab63] Y. N. Rabotnov. On the equations of state of creep. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, volume 178, pages 2–117–2–122, 1963.

[SCA82] D. Stauffer, A. Coniglio, und M. Adam. Gelation and critical phenomena. In Karel Dušek, editor, *Polymer Networks*, volume 44 of *Advances in Polymer Science*, pages 103–158. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1982.

[Sch74] M. Schlimmer. *Fließverhalten plastisch kompressibler Werkstoffe*. PhD thesis, 1974.

[Sch90] F. R. Schwarzl. *Polymermechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[SH98] J. C. Simo und T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, 1998.

[SK76] S. Sourour und M.R Kamal. Differential scanning calorimetry of epoxy cure: isothermal cure kinetics. *Thermochimica Acta*, 14(1-2):41–59, 1976.

[SS52] F. Schwarzl und A. J. Staverman. Time Temperature Dependence of Linear Viscoelastic Behavior . *Journal of Applied Physics*, 23(8):838–843, 1952.

[SS08] F. P. Schmitz und D. Symietz. Klebstoffe im Fahrzeugbau. Die unsichtbaren Helfer. *Chemie in unserer Zeit*, 42(2):92–101, 2008.

[SVW16] Sibin Saseendran, Janis Varna, und Maciej Wysocki, editors. *VISCOELASTIC BEHAVIOR OF LY5052 EPOXY RESIN IN RUBBERYSTATE DURING CURING*, volume 2, 2016.

[SWV16] Sibin Saseendran, Maciej Wysocki, und Janis Varna. Evolution of viscoelastic behavior of a curing ly5052 epoxy resin in the glassy state. *Advanced Manufacturing: Polymer & Composites Science*, 2(2):74–82, 2016.

[TPG70] R. L. Taylor, K. S. Pister, und G. L. Goudreau. Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:45–59, 1970.

[Tsc89] Nicholas W. Tschoegl. *The Phenomenoligical Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. An Introduction. Springer, 1989.

[Val71] K. Valanis. A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. Part 1. General Theory. 23, 1971.

[vT67] A. von Tobolsky. *Mechanische Eigenschaften und Struktur von Polymeren*. Berliner Union Stuttgart, 1967.

[Wil55] M. L. Williams. The Temperature Dependence of Mechanical and Electrical Relaxations in Polymers. *Journal of Physical Chemistry*, 59(1):95–96, 1955.

[Win86] H. Henning Winter. Analysis of linear viscoelasticity of a crosslinking polymer at the gel point. *Journal of Rheology*, 30(2):367, 1986.

[Win04] H. H. Winter. Gel Point. In H. F. Mark und N. M. Bikales, editors, *Encyclopedia of Polymer Science and Technology*, volume 10, pages 132–144. John Wiley & Sons, Inc., 3. edition, 2004.

[WLF55] M. L. Williams, R. F. Landel, und J. D. Ferry. The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids. *Journal of the American Chemical Society*, 77(14):3701–3707, 1955.

[WM97] Horst Henning Winter und Marian Mours. Rheology of polymers near liquid-solid transitions. In *Neutron spin echo spectroscopy viscoelasticity rheology*, pages 165–234. Springer, 1997.

[Yag13] B. Yagimli. *Kontinuumsmechanische Betrachtung von Aushärtevorgängen*. PhD thesis, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Institut für Mechanik, 2013.

A Anhang IfM
Appendix IfM

Patrick Kühlmeyer, Anton Matzenmiller

A.1 Materialparameter des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells
Material parameters of the viscoelastic cohesive zone model

In den Tabellen A-1 und A-2 sind die Materialparameter des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells aufgeführt. Die Materialparameter werden aus den Parametern des LWF

Tabelle A-1: Relaxationsspektrum des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells für die Normalbeanspruchung bei der Referenztemperatur $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$
Table A-1: Relaxation spectrum of the viscoelastic cohesive zone model for tensile loading at reference temperature $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{n}}$

i	Beteiligungsfaktoren v_i^{n} [-]	Schubsteifigkeit k_i [MPa/mm]	Relaxationszeiten $\hat{\tau}_i^{\mathrm{n}}$ [s]
1	$1.66 \cdot 10^{-1}$	$1.4765 \cdot 10^{3}$	$6.03 \cdot 10^{-14}$
2	$5.47 \cdot 10^{-2}$	$4.8621 \cdot 10^{2}$	$6.29 \cdot 10^{-12}$
3	$6.46 \cdot 10^{-2}$	$5.7446 \cdot 10^{2}$	$9.94 \cdot 10^{-13}$
4	$5.72 \cdot 10^{-2}$	$5.0912 \cdot 10^{2}$	$3.96 \cdot 10^{-11}$
5	$5.34 \cdot 10^{-2}$	$4.7518 \cdot 10^{2}$	$2.65 \cdot 10^{-10}$
6	$4.97 \cdot 10^{-2}$	$4.4209 \cdot 10^{2}$	$1.57 \cdot 10^{-9}$
7	$4.70 \cdot 10^{-2}$	$4.1833 \cdot 10^{2}$	$8.78 \cdot 10^{-9}$
8	$4.81 \cdot 10^{-2}$	$4.2766 \cdot 10^{2}$	$4.59 \cdot 10^{-8}$
9	$4.27 \cdot 10^{-2}$	$3.8015 \cdot 10^{2}$	$2.10 \cdot 10^{-7}$
10	$5.12 \cdot 10^{-2}$	$4.5567 \cdot 10^{2}$	$8.43 \cdot 10^{-7}$
11	$6.85 \cdot 10^{-2}$	$6.0925 \cdot 10^{2}$	$5.45 \cdot 10^{-6}$
12	$7.67 \cdot 10^{-2}$	$6.8223 \cdot 10^{2}$	$5.01 \cdot 10^{-5}$
13	$7.51 \cdot 10^{-2}$	$6.6780 \cdot 10^{2}$	$6.36 \cdot 10^{-4}$
14	$6.26 \cdot 10^{-2}$	$5.5664 \cdot 10^{2}$	$8.01 \cdot 10^{-3}$
15	$3.78 \cdot 10^{-2}$	$3.3602 \cdot 10^{2}$	$6.96 \cdot 10^{-2}$
16	$1.71 \cdot 10^{-2}$	$1.5189 \cdot 10^{2}$	$3.65 \cdot 10^{-1}$
17	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$9.5885 \cdot 10^{1}$	$1.45 \cdot 10^{0}$
18	$6.85 \cdot 10^{-3}$	$6.0925 \cdot 10^{1}$	$7.22 \cdot 10^{0}$
19	$3.27 \cdot 10^{-3}$	$2.9105 \cdot 10^{1}$	$4.72 \cdot 10^{1}$
20	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$1.1370 \cdot 10^{1}$	$2.80 \cdot 10^{2}$
21	$5.40 \cdot 10^{-4}$	$4.8027 \cdot 10^{0}$	$1.29 \cdot 10^{3}$
22	$2.91 \cdot 10^{-4}$	$2.5880 \cdot 10^{0}$	$6.28 \cdot 10^{3}$
23	$1.28 \cdot 10^{-4}$	$1.1370 \cdot 10^{0}$	$4.02 \cdot 10^{4}$
24	$6.40 \cdot 10^{-5}$	$5.6937 \cdot 10^{-1}$	$1.51 \cdot 10^{5}$
-	$\hat{v}_{\infty}^{\mathrm{n}}$ [-]	$\hat{k}_{\infty}$ [MPa/mm]	-
-	$4.29 \cdot 10^{-3}$	$3.8184 \cdot 10^{1}$	-
$\sum$	1.0	8893.73	-

Tabelle A-2: Relaxationsspektrum des viskoelastischen Kohäsivzonenmodells für den Schub bei der Referenztemperatur $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$
Table A-2: Relaxation spectrum of the viscoelastic cohesive zone model for shear loading at reference temperature $\theta_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}$

i	Beteiligungsfaktoren v_i^{s} [-]	Schubsteifigkeit g_i [MPa/mm]	Relaxations-zeiten $\hat{\tau}_i^{\mathrm{s}}$ [s]
1	$5.93 \cdot 10^{-2}$	$4.4536 \cdot 10^{2}$	$7.92 \cdot 10^{-21}$
2	$1.74 \cdot 10^{-1}$	$1.3066 \cdot 10^{3}$	$1.00 \cdot 10^{-20}$
3	$6.74 \cdot 10^{-2}$	$5.0645 \cdot 10^{2}$	$8.66 \cdot 10^{-19}$
4	$6.97 \cdot 10^{-2}$	$5.2356 \cdot 10^{2}$	$6.89 \cdot 10^{-18}$
5	$5.99 \cdot 10^{-2}$	$4.4968 \cdot 10^{2}$	$8.84 \cdot 10^{-17}$
6	$5.42 \cdot 10^{-2}$	$4.0720 \cdot 10^{2}$	$8.01 \cdot 10^{-16}$
7	$5.36 \cdot 10^{-2}$	$4.0242 \cdot 10^{2}$	$7.98 \cdot 10^{-15}$
8	$4.85 \cdot 10^{-2}$	$3.6452 \cdot 10^{2}$	$1.24 \cdot 10^{-13}$
9	$4.54 \cdot 10^{-2}$	$3.4112 \cdot 10^{2}$	$1.89 \cdot 10^{-12}$
10	$3.93 \cdot 10^{-2}$	$2.9542 \cdot 10^{2}$	$2.56 \cdot 10^{-11}$
11	$3.64 \cdot 10^{-2}$	$2.7317 \cdot 10^{2}$	$3.18 \cdot 10^{-10}$
12	$3.56 \cdot 10^{-2}$	$2.6755 \cdot 10^{2}$	$3.61 \cdot 10^{-9}$
13	$3.48 \cdot 10^{-2}$	$2.6147 \cdot 10^{2}$	$4.26 \cdot 10^{-8}$
14	$3.83 \cdot 10^{-2}$	$2.8804 \cdot 10^{2}$	$6.58 \cdot 10^{-7}$
15	$3.99 \cdot 10^{-2}$	$2.9999 \cdot 10^{2}$	$9.85 \cdot 10^{-6}$
16	$3.64 \cdot 10^{-2}$	$2.7348 \cdot 10^{2}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$
17	$3.70 \cdot 10^{-2}$	$2.7764 \cdot 10^{2}$	$1.87 \cdot 10^{-3}$
18	$3.46 \cdot 10^{-2}$	$2.5996 \cdot 10^{2}$	$2.40 \cdot 10^{-2}$
19	$2.30 \cdot 10^{-2}$	$1.7261 \cdot 10^{2}$	$2.79 \cdot 10^{-1}$
20	$8.31 \cdot 10^{-3}$	$6.2390 \cdot 10^{1}$	$2.82 \cdot 10^{0}$
21	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$1.6845 \cdot 10^{1}$	$3.20 \cdot 10^{1}$
22	$5.95 \cdot 10^{-4}$	$4.4661 \cdot 10^{0}$	$3.70 \cdot 10^{2}$
23	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$7.9548 \cdot 10^{-1}$	$5.07 \cdot 10^{3}$
24	$5.47 \cdot 10^{-5}$	$4.1074 \cdot 10^{-1}$	$1.17 \cdot 10^{5}$
-	$\hat{v}_{\infty}^{\mathrm{s}}$ [-]	$\hat{g}_{\infty}$ [MPa/mm]	-
-	$1.37 \cdot 10^{-3}$	$1.0294 \cdot 10^{1}$	-
$\sum$	1.0	7511.4	-

für die Klebschichtdicke d_{k} umgerechnet. Im Anschluss werden die beiden instantanen Steifigkeiten k und g an die Messdaten quasistatisch zügiger Scher- und Kopfzugversuche angepasst.

A.2 Herleitungen
Derivations

A.2.1 Nichtlineare isotrope Verfestigung
Nonlinear isotropic hardening

Für die Differentialgleichung (6-51) folgt die äquivalente differentielle Schreibweise

$$\dot{\kappa}_\mathrm{l} = E_{\kappa_\mathrm{l}} \left(1 - \frac{\kappa_\mathrm{l}}{\kappa^\infty}\right) \dot{\bar{\varepsilon}}^\mathrm{pl} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\kappa_\mathrm{l} = E_{\kappa_\mathrm{l}} \left(1 - \frac{\kappa_\mathrm{l}}{\kappa^\infty}\right) \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^\mathrm{pl} \quad . \tag{A-1}$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}\kappa_\mathrm{l}}{\kappa^\infty - \kappa_\mathrm{l}} = \frac{E_{\kappa_\mathrm{l}}}{\kappa^\infty} \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^\mathrm{pl} \tag{A-2}$$

Substitution $s := \kappa^\infty - \kappa_\mathrm{l}$ mit $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}\kappa_\mathrm{l}$ und Einsetzten in Gl. (A-2)

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{s} = -\frac{E_{\kappa_\mathrm{l}}}{\kappa^\infty} \int \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^\mathrm{pl} \tag{A-3}$$

$$\ln|s| = -\frac{E_{\kappa_\mathrm{l}}}{\kappa^\infty} \bar{\varepsilon}^\mathrm{pl} + C \tag{A-4}$$

$$s = C \exp\left(-\frac{E_{\kappa_\mathrm{l}}}{\kappa^\infty} \bar{\varepsilon}^\mathrm{pl}\right) \tag{A-5}$$

Rücksubstitution

$$\kappa_\mathrm{l} = \kappa^\infty - C \exp\left(-\frac{E_{\kappa_\mathrm{l}}}{\kappa^\infty} \bar{\varepsilon}^\mathrm{pl}\right) \tag{A-6}$$

Anfangsbedingung $\kappa_\mathrm{l}(0) = 0$

$$0 = \kappa^\infty - C \exp\left(-\frac{E_{\kappa_\mathrm{l}}}{\kappa^\infty} \bar{\varepsilon}^\mathrm{pl}\right) \quad \Rightarrow \quad C = \kappa^\infty \tag{A-7}$$

Nach Einsetzen der Anfangsbedingung folgt

$$\kappa_\mathrm{l} = \kappa^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{E_{\kappa_\mathrm{l}}}{\kappa^\infty} \bar{\varepsilon}^\mathrm{pl}\right)\right] \quad . \tag{A-8}$$

A.2.2 Chemischer Schrumpf aus [LH07]
Chemical shrinkage in [LH07]

Folgend ist die Gleichung aus [LH07, Gl. (4.6)] für den Deformationsgradient der chemischen Konfiguration angegeben:

$$\mathbf{F}_\mathrm{c} = g(p)^{\frac{1}{3}} \mathbf{1} \quad \text{mit} \quad g(p) = 1 + \beta_\mathrm{c}\, p \quad \text{für} \quad \beta_\mathrm{c} \leq 0 \tag{A-9}$$

Der Verschiebungsgradient der chemischen Konfiguration berechnet sich mit

$$\mathbf{H}_\mathrm{c} = \mathbf{F}_\mathrm{c} - \mathbf{1} \quad . \tag{A-10}$$

Der lineare Dehnungstensor berechnet sich aus dem Verschiebungsgradient zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{ch}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}_{\mathrm{c}} + \mathbf{H}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\right] \quad . \tag{A-11}$$

Nach Einsetzen des Verschiebungsgradient in die lineare Dehnung folgt

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{ch}} = \left[\sqrt[3]{1+\beta_{\mathrm{c}}\, p} - 1\right] \mathbf{1} \tag{A-12}$$

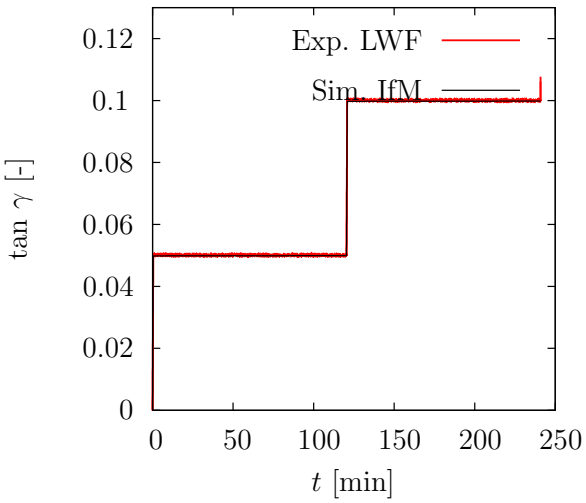
Für den eindimensionalen Fall unter Betrachtung der Komponente $\varepsilon_{11}^{\mathrm{ch}}$ folgt für den chemischen Schrumpf der Ansatz

$$\varepsilon_{11}^{\mathrm{ch}} =: \varepsilon^{\mathrm{ch}} = \sqrt[3]{1+\beta_{\mathrm{c}}\, p} - 1 \tag{A-13}$$

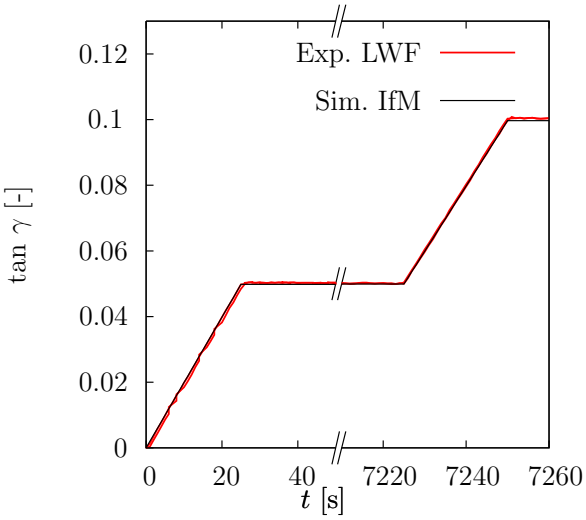
aus dem Deformationsgradient $\mathbf{F}_{\mathrm{c}}$ (A-9) in [LH07].

A.3 Stufenversuche an Scherzugprobe
Relaxation step tests with the thick adherend shear specimen

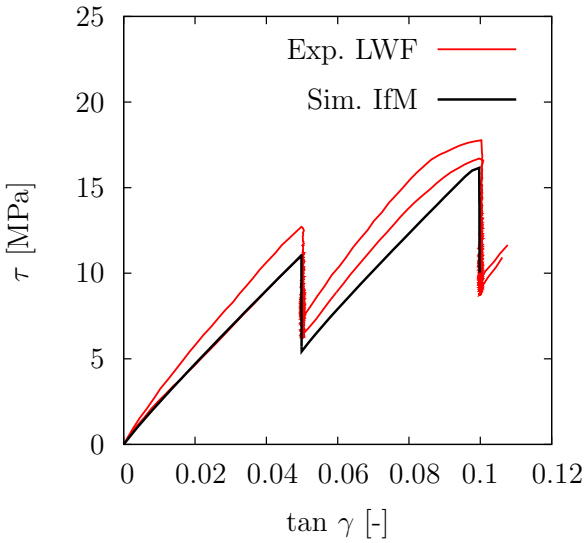
Im Rahmen des Projekt P 878 sind am LWF Stufenversuche mit der Scherzugprobe durchgeführt worden. Die Klebschicht der Scherzugprobe ist vollständig ausgehärtet und der Versuch findet bei Raumtemperatur statt. Im Versuch wird die Scherzugprobe mit einer Verschiebungsrandbedingung in Form von Stufen in der Zeit t belastet. Die Verschiebungsrandbedingung wird dabei so geregelt, dass sich die in den Abbn. A-1(a) und Abb. A-1(b) dargestellten lokalen Gleitungs-Zeitverläufe $\tan\gamma(t)$ in der Klebschicht einstellen. Abb. A-1(a) zeigt die beiden Stufen, die mit einer Gleitraten von $2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ angefahren werden – s. Abb. A-1(b). Nach jedem anfahren der Stufen beträgt die Haltezeit jeweils etwa zwei Stunden.
Das Ergebnis der Simulation ist im Schubspannungs-Gleitungsdiagramm A-1(c) und Schubspannungs-Zeitdiagramm A-1(d) den Messdaten aus den Scherzugversuchen des LWF gegenübergestellt. Nach der quasistatischen Belastung beim Anfahren der beiden Stufen findet während der Haltezeiten jeweils Spannungsrelaxation in der Klebschicht statt. Das Verhalten der Klebschicht wird mit dem viskoelastischen Kohäsivzonenmodell und den identifizierten Materialparametern gut prognostiziert. Die Simulation korreliert sowohl im Bereich der quasistatisch zügigen Belastung als auch während der Haltezeiten gut mit den Messdaten. Der erste Relaxationsprozess wird lediglich im Spannungsniveau etwas über- und im zweiten Relaxationsprozess etwas überschätzt. Jedoch verlaufen die Kurven aus den FE-Berechnungen mit denen der Messung während der Relaxation in Abb. A-1(d) affin.



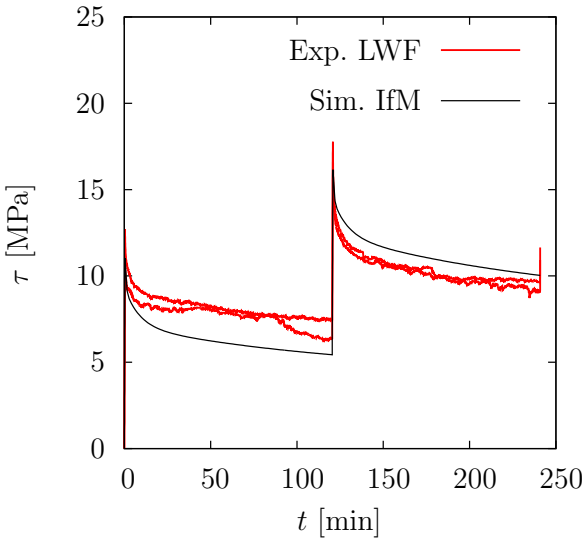
(a) Stufen



(b) Rampen zu den Stufen



(c) Schubspannungs-Gleitungsverlauf



(d) Schubspannungs-Zeitverlauf

Abbildung A-1: (a) und (b) lokale Gleitung in der Klebschicht $\tan\gamma$ über der Zeit t und Auswertung der Schubspannung τ über der Gleitung $\tan\gamma$ (c) und in der Zeit t (d)
Figure A-1: (a) and (b) local shear strain in the adhesive $\tan\gamma$ over time t and shear stress τ over shear strain $\tan\gamma$ (c) and time t (d)

A.4 Scherzugproben unter definierter thermochemischer Belastung – lokale Verschiebungen und Aushärtegrade
Thick adherend shear specimen under defined thermomechanical loading – local displacements and degree of cure

Im den folgenden Abbn. A-2 sind die Verläufe des Aushärtegrads $p(t)$ zusammen mit den lokalen Klebschichtverschiebungen Δ_t der einzelnen Versuche in Kapitel 8.2.1 über der Zeit t dargestellt. Anhand der Abbn. A-2 wird deutlich, dass sich der Aushärtegrad p

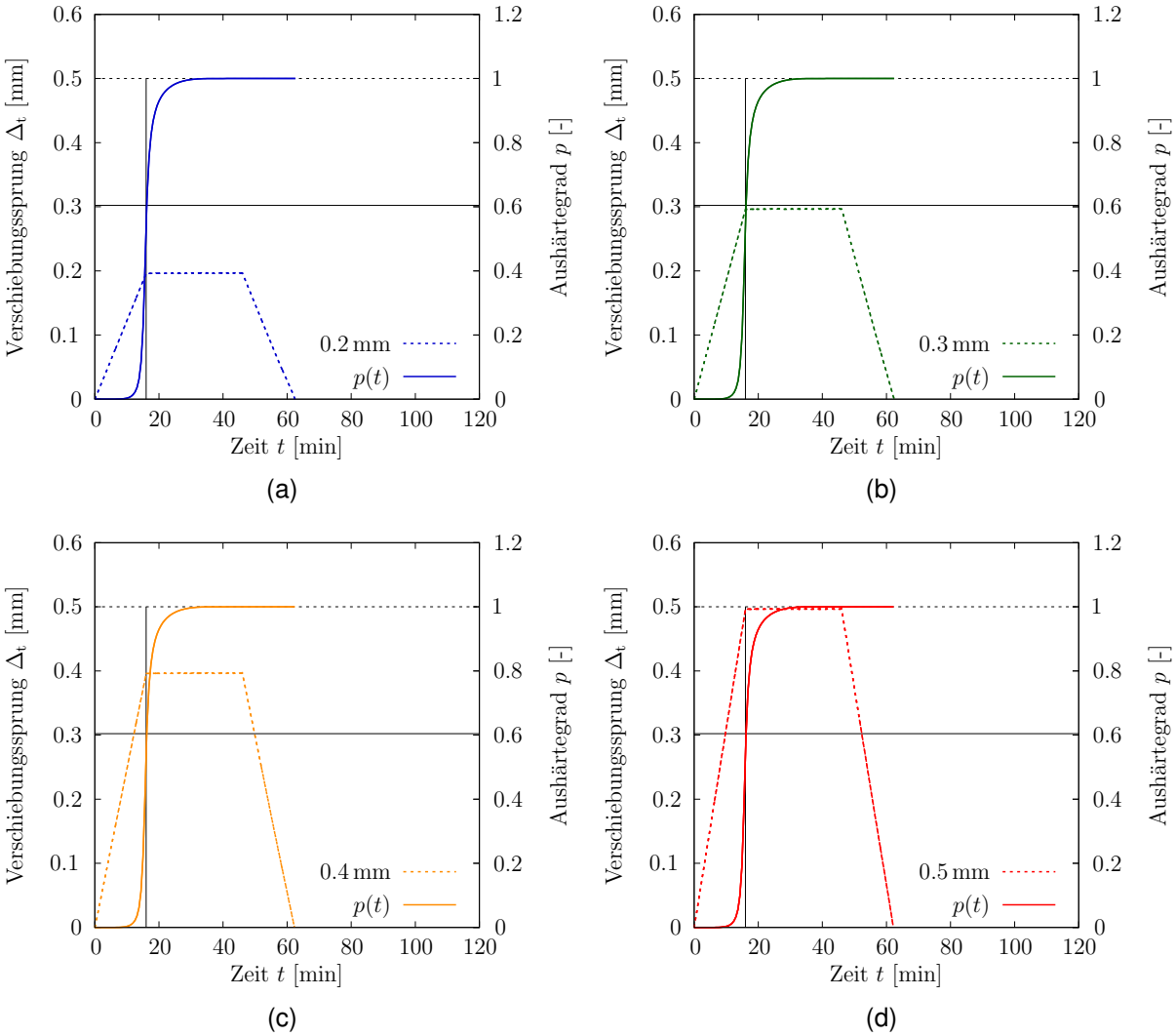


Abbildung A-2: Darstellung der zeitlichen Verläufe der lokalen Verschiebung der Klebschicht $\Delta_t(t)$ und des Aushärtegrads $p(t)$
Figure A-2: Local displacement in the adhesive $\Delta_t(t)$ and degree of cure $p(t)$ over time t

in allen FE-Rechnungen in Abhängigkeit der Zeit-Temperaturverläufe $\theta(t)$ in Abb. 8-5(a) gleich in der Zeit t entwickelt.